Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

14. Übungsblatt für die Woche vom 17. bis 21. Juni 2019

AUFGABE 14.1. Bestimme alle Lösungen folgender Gleichungssysteme:
(a)

$$\begin{array}{rrrcr} -x & -2y & +5z & = & -2 \\ 2x & +6y & -16z & = & 2 \\ 3x & +9y & -23z & = & 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & 8x_4 & = & 16 \\ -2x_1 & -4x_2 & -5x_3 & -3x_4 & = & -9 \\ -3x_1 & -6x_2 & -7x_3 & -2x_4 & = & -4 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & & +4x_3 & +15x_4 & = & 34 \end{array}$$

AUFGABE 14.2. (a) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 & = & -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 & = & -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 & = & 35 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum an.

(b) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +6x_5 & & 7x_7 & +8x_8 & = & 10 \\ & & & x_4 & +4x_5 & & +9x_7 & & = & 11 \\ & & & & & x_6 & & +5x_8 & = & 12 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 14.3. Bestimme die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.4. Betrachte die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Inverse A^{-1} sowie eine Matrix X, für die $XA = B$ gilt.

Aufgabe 14.5. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix mit $D := ad - bc \neq 0$. Verwende das Eliminationsverfahren, um die Inverse von A zu bestimmen und bestätige damit erneut die bekannte Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.6. Zeige, dass die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y + z + w \\ x + y - z - w \\ x - y + z - w \\ x - y - z + w \end{pmatrix},$$

bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung.

Aufgabe 14.7. Zeige, dass eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch ihre Eckensummen

$$\begin{aligned} e &:= b + c + d \\ f &:= a + c + d \\ g &:= a + b + d \\ h &:= a + b + c \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt ist und drücke die Eintragungen von A durch e, f, g, h aus. Gibt es zu beliebig vorgegebenen Zahlen e, f, g, h stets eine Matrix A mit diesen Eckensummen?

Aufgabe 14.8. Für welche Werte von λ sind folgende Matrix invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende Zeilenumformungen, um die Matrzien auf Zeienstufenform zu bringen.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 14.1. Ad (a): Durch Zeilumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & -16 & 2 \\ 3 & 9 & -23 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -8 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die letzte Matrix entspricht dem System:

$$\begin{array}{cccrl} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 1 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung lautet daher $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ad (b): Durch Zeilumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 16 \\ -2 & -4 & -5 & -3 & -9 \\ -3 & -6 & -7 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 20 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Die letzte Matrix entspricht dem System:

$$\begin{array}{ccccrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & 4x_4 & = & 8 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 7 \\ & & & 0 & = & 6 \end{array}$$

Das System besitzt daher keine Lösung.

Ad (c): Durch Zeilumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 & -5 \\ -3 & 5 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 4 & 15 & 34 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 9 & 19 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Die letzte Matrix entspricht dem System

$$\begin{array}{ccccrl} x_1 & & & +x_4 & = & 6 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 5 \\ & & x_3 & +3x_4 & = & 4 \end{array}$$

Wir lesen eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1 für den Lösungsraum des assoziierten homogenen Systems ab:

$$\xi = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\phi\colon \mathbb{R} \to L, \qquad \phi(s) := \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums L.

Zu Aufgabe 14.2. (a) Durch Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -3 & -3 & -12 & -12 & -21 \\ 1 & -3 & -5 & -18 & -20 & 41 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 6 & 15 \\ -1 & 3 & 4 & 16 & 17 & 35 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -14 & -16 & -34 \\ 0 & 1 & 4 & 11 & 14 & 29 \\ 0 & 2 & 3 & 12 & 13 & 28 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ein minimales lineares Gleichungssystem für L lautet daher:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & +x_4 & +x_5 & = 4 \\ & x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = 5 \\ & & x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = 6 \end{array}$$

Wir lesen eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2 für den Lösungsraum des assoziierten homogenen Systems ab:

$$\xi = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Weiters ist

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to L, \qquad \phi\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums L.

(b) Das System liegt bereits in reduzierter Zeilenstufenform vor. Wir lesen eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 für den Lösungsraum des assoziierten homogenen Systems ab:

$$\xi = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist daher von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{R}$. Weiters ist $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to L$,

$$\varphi\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\\0\\0\\11\\0\\12\\0\\0 \end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} -3\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix} -6\\0\\0\\-4\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + s_4\begin{pmatrix} -7\\0\\0\\-9\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + s_5\begin{pmatrix} -8\\0\\0\\0\\0\\-5\\0\\1 \end{pmatrix}$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums L.

Zu Aufgabe 14.3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Wir verwenden das Eliminationsverfahren, um die Inversen von B zu bestimmen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&3&4&1&0&0&0\\ 0&1&2&3&0&1&0&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&3&0&1&0&0&-4\\ 0&1&2&0&0&1&0&-3\\ 0&0&1&0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&0&0&1&0&-3&2\\ 0&1&0&0&0&1&-2&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-2&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&-2&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

und erhalten $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir verwenden das Eliminationsverfahren, um die Inversen von C zu bestimmen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2&5&0&0&1&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&3&7&0&0&1&0\\ 0&0&2&5&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 2&5&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&3&7&0&0&1&0\\ 0&0&2&5&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&-1&0&0&1&-2&0&0\\ 0&0&3&7&0&0&1&0\\ 0&0&2&5&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&3&-5&0&0\\ 0&1&0&0&-1&2&0&0\\ 0&0&3&7&0&0&1&0\\ 0&0&2&5&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&3&-5&0&0\\ 0&1&0&0&-1&2&0&0\\ 0&0&1&7/3&0&0&1/3&0\\ 0&0&0&1/3&0&0&-2/3&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&3&-5&0&0\\ 0&1&0&0&-1&2&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&5&-7\\ 0&0&0&1&0&0&-2&3 \end{array}\right)$$

und erhalten $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe 14.4. wir verwenden das Eliminationsverfahren, um die Inverse von A zu bestimmen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right)$$

und erhalten

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -4/5 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix X mit $XA = B$ zu finden, multiplizieren wir diese Gleichung von rechts mit A^{-1} und erhalten $X = BA^{-1}$. Daher

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe 14.5. Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - bc/a & -c/a & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & D/a & -c/a & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a + bc/aD & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right)$$

und daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bei obiger Rechnung haben wir $a \neq 0$ vorausgesetzt. Ist $a = 0$, dann muss $c \neq 0$ gelten und eine ähnliche Rechnung führt auf dieselbe Formel für die Inverse.

Zu Aufgabe 14.6. Die lineare Abbildung φ entspricht der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $\varphi(v) = \varphi_A(v) = Av$ für $v \in \mathbb{R}^4$, oder in Komponenten:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y-z-w \\ x-y+z-w \\ x-y-z+w \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass φ_A genau dann bijektiv ist, wenn A invertierbar ist und, dass in diesem Fall die Umkehrabbildung der inversen Matrix entspricht, d.h. $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.

Mit dem Eliminationsverfahren bestimmen wir daher die Inverse von A:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle sehen wir, dass A tatsächlich invertierbar ist, denn der Rang der linken Seite ist 4. Durch weitere Zeilenumformungen bringen wir die linke Seite auf die Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y-z-w \\ x-y+z-w \\ x-y-z+w \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 14.7. Wir fassen die Eckensumme als lineare Abbildung auf:

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c+d \\ a+c+d \\ a+b+d \\ a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Mit dem Eliminationsverfahren bestimmen wir die Inverse der zugehörigen Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung oben ist daher bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e+f+g+h \\ e-2f+g+h \\ e+f-2g+h \\ e+f+g-2h \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 14.8. (a) Die Matrix A ist genau dann invertierbar wenn $\lambda \neq 0$.

(b) Mit Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

Also ist B genau dann invertierbar wenn $3-\lambda/2 \neq 0$ und $\lambda - 2 \neq 0$ gilt, d.h. $\lambda \neq 6$ und $\lambda \neq 2$.

(c) Mit Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-2\lambda \end{pmatrix}.$$

Also ist C genau dann invertierbar wenn $4-2\lambda \neq 0$ gilt, d.h. genau dann wenn $\lambda \neq 2$.