Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

2. Übungsblatt für die Woche vom 11. bis 15. März 2019

Aufgabe 2.1. Wiederhole die Begriffe Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse und Quotientenmenge. Gib einige mathematische Beispiele.

Aufgabe 2.2. Sei H eine nicht leere Menge und $+\colon H \times H \to H$ eine Verknüpfung mit folgenden Eigenschaften. Für alle $a, b, c \in H$ gelte:

(i) $a + b = b + a$ (Kommutativität)
(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
(iii) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Ein neutrales Element oder additive Inverse (Gruppenaxiome) werden nicht vorausgesetzt.

(a) Zeige, dass durch $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = a' + b$ auf $H \times H$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Bezeichne die Quotientenmenge mit $G := (H \times H)/\sim$. Für die von $(a, b) \in H \times H$ repräsentierte Äquivalenzklasse schreiben wir $[a, b]$.
(b) Zeige, dass durch $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$ auf G eine Operation $+$ wohldefiniert ist.
(c) Zeige, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 2.3. In der Situation von Aufgabe 2.2 sei $c \in H$ fix. Betrachte die Abbildung

$$\iota\colon H \to G, \qquad \iota(a) := [a + c, c].$$

(a) Zeige, dass ι nicht von der Wahl von c abhängt.
(b) Zeige, dass ι ein Homomorphismus ist, d.h. $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ für $a, b \in H$.
(c) Zeige, dass ι injektiv ist. Wir können daher H mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$ identifizieren.
(d) Zeige, dass jedes $g \in G$ von der Form $g = \iota(a) - \iota(b)$ ist, für geeignete $a, b \in H$.
(e) Zeige, dass ι bijektiv ist, wenn wir mit einer Gruppe H beginnen. In diesem Fall liefert die Konstruktion also nichts Neues.

Aufgabe 2.4. In der Situation von Aufgabe 2.2 setzen wir weiters voraus:

(iv) Sind $a, b \in H$, dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein: Entweder existiert $x \in H$ mit $a + x = b$; oder $a = b$; oder es existiert $x \in H$ mit $a = b + x$.

Zeige, dass in dieser Situation folgendes gilt:

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(a) $\iota(a) \neq 0$, für alle $a \in H$.
(b) $\iota(a) \neq -\iota(b)$ für alle $a, b \in H$.
(c) Zu jedem $g \in G \setminus \{0\}$ existiert $a \in H$ mit $g = \iota(a)$ oder $g = -\iota(a)$.

Identifizieren wir H via ι mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$, dann gilt also

$$G \setminus \{0\} = (-H) \cup H \qquad \text{und} \qquad (-H) \cap H = \emptyset,$$

wobei $-H = \{-a : a \in H\}$.

Aufgabe 2.5. In der Situation von Aufgabe 2.2 nehmen wir weiters an, dass auf H eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, für die das Distributivgesetz gilt, d.h. für beliebige $a, b, c \in H$ gelte:

$$ab = ba, \qquad a(bc) = (ab)c, \qquad \text{und} \qquad a(b+c) = ab + ac.$$

(a) Zeige, dass durch $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$ auf G eine Operation wohldefiniert ist.
(b) Zeige, dass $(G, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 2.6. In der Situation von Aufgabe 2.5 zeige weiters:

(a) Zeige $\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad]$ für beliebige $a, c, d \in H$.
(b) Zeige $\iota(ac) = \iota(a)\iota(c)$ für $a, c \in H$.
(c) Zeige, dass der Ring G ein Einselement besitzt, wenn für die Multiplikation in H ein neutrales Element existiert.

Aufgabe 2.7. Wenden wir obige Konstruktion auf $H = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ an, erhalten wir $G = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition, vgl. Einführung in die Mathematik. Wir wollen hier eine direktere (aber weniger elegante) Konstruktion von $\mathbb{Z}$ skizzieren. Dazu fixieren wir $o \notin \mathbb{N}$ und zu jedem $a \in \mathbb{N}$ ein $a' \notin \{o\} \cup \mathbb{N}$ so, dass $a' \neq b'$ für alle $a \neq b$ gilt. Wir betrachten nun

$$Z := \{a' : a \in \mathbb{N}\} \cup \{o\} \cup \mathbb{N} = \{\dots, 3', 2', 1', o, 1, 2, 3, \dots\}$$

und dehnen die Addition von $\mathbb{N}$ zu einer Verknüpfung $+\colon Z \times Z \to Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $g + o := g$ und $o + g := g$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$a' + b' := (a + b)'$$

$$a' + b := \begin{cases} x & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x' & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$a + b' := \begin{cases} x' & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeige, dass $(Z, +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Da der Beweis des Assoziativgesetzes eine unangenehme Fallunterscheidung erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$a' + (b + c) = (a' + b) + c,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.8. In der Situation von Aufgabe 2.7 dehnen wir nun auch die Multiplikation von $\mathbb{N}$ zu einer Verknüpfung $\cdot\colon Z \times Z \to Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $og := o$ und $go := o$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a'b := (ab)', \qquad ab' := (ab)' \qquad \text{und} \qquad a'b' := (ab)'.$$

Zeige, dass $(Z, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet. Da der Beweis der Assoziativ- und Distributivgesetze umfangreiche Fallunterscheidungen erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$(a'b)c = a'(bc) \qquad \text{und} \qquad (a' + b)c = a'c + bc,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.