Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

4. Übungsblatt für die Woche vom 25. bis 29. März 2019

Aufgabe 4.1. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A*B*B'$ und $A*C*C'$. Zeige, dass sich die Strecken $[BC]$ und $[B'C']$ nicht schneiden. Hinweis: Verwende Axiom A4 oder Proposition 1.2.9.

Aufgabe 4.2. Seien AB und CD zwei Strecken. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
(a) Es existiert $X \in (CD)$ mit $AB \equiv CX$.
(b) Es gilt $|AB| < |CD|$, d.h. es existiert $c \in \mathcal{P}$ mit $|AB| + c = |CD|$.
Dabei bezeichnet $\mathcal{P}$, wie in der Vorlesung, die Menge der Kongruenzklassen von Strecken (positive Streckenlängen).

Aufgabe 4.3. Sei X ein Punkt im Inneren eines Winkels $\angle AOB$. Zeige, dass dann der gesamte Halbstrahl $(OX{>}$ im Inneren dieses Winkels liegt.

Aufgabe 4.4. Seien h, k, l, r vier, vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen mit folgenden beiden Eigenschaften:
(a) h und l bilden einen Winkel und k liegt im Inneren von $\angle(h, l)$.
(b) h und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Zeige, dass dann auch folgende beiden Aussagen zutreffen:
(c) k und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(k, r)$.
(d) k liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Hinweis: Zeige, dass eine Gerade existiert, die alle vier Halbstrahlen schneidet und wende Lemma 1.2.26 auf die Schnittpukte an.

Aufgabe 4.5 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass sich die Strecken (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden.
(a) Zeige, dass $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ Winkel bilden.
(b) Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel. Zeige, dass V konvex ist.
(c) Zeige, dass die Diagnalen (AC) und (BD) in V liegen.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 4.6 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ Winkel bilden. Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel.

(a) Skizziere eine Situation, in der $(AC) \cap (BD) = \emptyset$ und $V = \emptyset$ gilt.
(b) Sei nun $V \neq \emptyset$. Zeige, dass sich (AC) und (BD) in genau einem Punkt treffen.

Aufgabe 4.7. Bezeichne $\mathcal{K}$, wie in der Vorlesung, die abelsche Gruppe, die wir aus den Kongruenzklassen von Strecken durch Hinzunehmen der additiven Inversen gewonnen haben. Zeige:

(a) Für $a, b \in \mathcal{K}$ gilt: $2a = 2b \Rightarrow a = b$.
(b) Für $a, b \in \mathcal{K}$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $na = nb \Rightarrow a = b$.

Dabei verwenden wir die Abkürzungen $2a := a + a$ und $na := a + \cdots + a$, wobei die zweite Summe aus n Summanden besteht. Hinweis: An dieser Stelle ist noch unklar, ob in $\mathcal{K}$ durch 2 oder n dividiert werden kann. Verwende stattdessen die Ordnungsrelation.

Aufgabe 4.8. Sei A eine abelsche Gruppe. Für $a \in A$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ bezeichne $na := a + \cdots + a$ und $(-n)a := -(a + \cdots + a)$, wobei beide Summen aus genau n Summanden bestehen. Insbesondere ist $1a = a$ und $(-1)a = -a$. Weiters sei $0a := 0$. Damit ist na für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $a \in A$ definiert.

(a) Zeige, dass die Gleichung $n(a + b) = na + nb$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in A$ gilt.
(b) Zeige, dass die Gleichung $(n + m)a = na + ma$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ gilt.
(c) Gib eine abelsche Gruppe A und $a, b \in A$ an, für die $a \neq b$ aber $2a = 2b$ gilt.