Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

6. Übungsblatt für die Woche vom 8. bis 12. April 2019

Aufgabe 6.1. Sei AB ein Strecke. Wähle auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ zwei Punkte C und D so, dass $\angle CAB \equiv \angle DBA$ und $AC \equiv BD$. Bezeichne den Schnittpunkt von $g(A, B)$ und $g(C, D)$ mit M. Fertige eine Skizze an und zeige, dass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist. Gehe anschließend näher auf folgende Punkte ein:

(a) Warum können Punkte C und D so gewählt werden?
(b) Warum haben $g(A, B)$ und $g(C, D)$ genau einen Schnittpunkt?
(c) Warum kann M nicht mit A oder B zusammenfallen? (Satz vom Außenwinkel)
(d) Warum liegt M im Inneren der Strecke AB?

Aufgabe 6.2 (Streckensymmetrale). Sei AB eine Strecke mit Mittelpunkt M und bezeichne g das Lot auf $g(A, B)$ durch M. Zeige

$$g = \{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}.$$

In den nächsten Beispielen verwenden wir folgende Definition: Vier Punkte ABCD werden als konvexes Viereck bezeichnet, wenn sich die Diagonalen (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden, vgl. Aufgaben 4.5 und 4.6.

Aufgabe 6.3. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Zeige, dass sich die Diagonalen AC und BD in ihren Mittelpunkten schneiden. Insbesondere sind Parallelogramme konvexe Vierecke.

Aufgabe 6.4. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in ihren Mittelpunkten schneiden. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.5. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A, B) \| g(C, D)$ und $|AB| = |CD|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.6. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $|AB| = |CD|$ und $|BC| = |DA|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.7.

(a) Skizziere ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $g(A, B) \| g(C, D)$ und $|BC| = |DA|$, das kein Parallelogramm ist.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(b) Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $g(A,B) \| g(C,D)$, $|BC| = |DA|$ und $|AC| \leq |BC|$. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 6.8 (Winkelsumme konvexer Vierecke). Zeige, dass für die Winkelsumme eines konvexen Vierecks $ABCD$ stets

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 4R$$

gilt. Skizziere ein (nicht konvexes) Viereck, für das diese Gleichung nicht erfüllt ist.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 6.1. Nach dem SWW Kongruenzsatz sind die Dreiecke CAM und DBM kongruent, denn die Scheitelwinkel sind kongruent, d.h. $\angle AMC \equiv BMD$, und nach Konstruktion haben wir $\angle CAM \equiv \angle DBM$ sowie $CA \equiv DB$. Insbesondere gilt $MA \equiv MB$.

(a) folgt aus den Axiomen K5 und K2.

(b) C und D liegen auf verschiedenen Seiten von $g(A,B)$.

(c) Wäre $M = B$, dann wäre im Dreieck ABC der Winkel $\angle CAB$ kongruent zum gegenüberliegenden Außenwinkel $\angle ABD$, was dem Satz vom Außenwinkel widerspricht. Analog kann $M = A$ ausgeschlossen werden.

(d) Wäre $M * A * B$, dann $|MA| < |MB|$, was $MA \equiv MB$ widerspricht. Analog kann $A * B * M$ ausgeschlossen werden. Nach Axiom A3 muss daher $A * M * B$ gelten, also liegt M im Inneren der Strecke AB.

Zu Aufgabe 6.2. Wir zeigen zunächst die Inklusion

$$g \subseteq \{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}.$$

Sei dazu $X \in g$. Es ist $|XA| = |XB|$ zu zeigen. O.B.d.A. sei $X \neq M$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind die Dreiecke XMA und XMB kongruent, denn sie haben die Seite XM gemein, die Winkel $\angle XMA$ und $\angle XMB$ sind beide rechte, und $MA \equiv MB$. Insbesondere erhalten wir $|XA| = |XB|$.

Für die umgekehrten Inklusion

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\} \subseteq g$$

sei nun X ein beliebiger Punkt mit $|XA| = |XB|$. Es ist $X \in g$ zu zeigen. O.B.d.A. können wir $X \notin g(A,B)$ annehmen, denn M ist der eindeutige Punkt auf $g(A,B)$, der $|MA| = |MB|$ genügt. Nach dem SSS Kongruenzsatz sind die Dreiecke XMA und XMB kongruent, denn sie haben die Seite XM gemein, es gilt $MA \equiv MB$ und $XA \equiv XB$. Insbesondere erhalten wir $\angle XMA \equiv \angle XMB$, also ist $\angle XMA$ ein rechter Winkel. Somit ist auch $g(X,M)$ eine Gerade durch M, die senkrecht auf $g(A,B)$ steht. Aus der Eindeutigkeit des Lots erhalten wir $g = g(X,M)$ und insbesondere $X \in g$.

Zu Aufgabe 6.3. Nach Voraussetzung sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte, die Geraden $g(A,B)$ und $g(C,D)$ sind disjunkte Parallele, und auch die Geraden $g(B,C)$ und $g(D,A)$ sind disjunkte Parallele. Aus der Parallelität folgt leicht, dass C im Inneren des Winkels $\angle BAD$ liegt. Daher schneidet die Gerade $g(A,C)$ die Strecke (BD). Analog schneidet auch die Gerade $g(B,D)$ die Strecke (AC). Beachte, dass die Geraden $g(A,C)$ und $g(B,D)$ nur einen Schnittpunkt haben können, da sonst die Parallelen $g(A,B)$ und $g(C,D)$ zusammenfallen würden. Also schneiden sich die Strecken (AC) und (BD) in einem Punkt M. Da

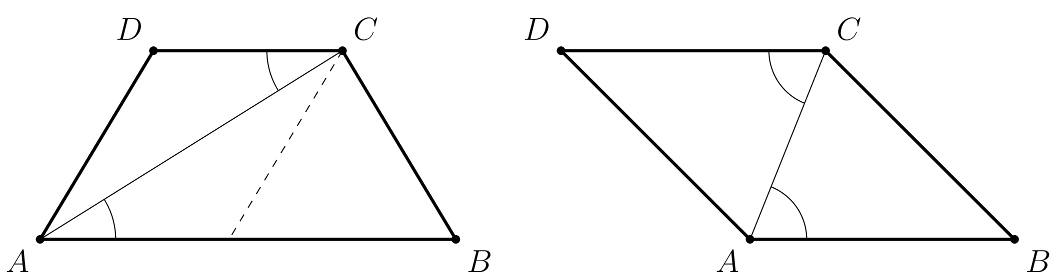
B und D auf verschiedenen Seiten von $g(A,C)$ liegen, bilden $\angle ACB$ und $\angle CAD$ Wechselwinkel und sind nach dem Stufenwinkelsatz daher kongruent. Analog folgt $\angle DBC \equiv \angle BDA$. In der Vorlesung haben wir bereits $|AD| = |BC|$ gezeigt. Nach dem WSW Kongruenzsatz sind die Dreiecke DMA und BMC kongruent. Insbesondere erhalten wir $MC \equiv MA$ und $MB \equiv MD$. Somit ist M Mittelpunkt von BC und auch Mittelpunkt von BD.

Zu Aufgabe 6.4. Nach Vorauussetzung gilt $(AC) \cap (BD) = \{M\}$ mit $MA \equiv MC$ und $MB \equiv MD$. Weiters haben wir $\angle BMC \equiv \angle DMA$, denn dies sind Scheitelwinkel. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind die Dreiecke BMC und DMA daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle BCM \equiv \angle DAM$. Also entstehen beim Schnitt von $g(A,C)$ mit $g(B,C)$ und $g(D,A)$ kongruente Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz sind $g(B,C)$ und $g(D,A)$ daher parallel. Analog lässt sich zeigen, dass $g(A,B)$ und $g(C,D)$ parallel sind.

Zu Aufgabe 6.5. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass B und D auf verschiedenen Seiten von $g(A,C)$ liegen. Somit bilden $\angle BAC$ und $\angle DCA$ Wechselwinkel. Aus dem Stufenwinkelsatz erhalten wir $\angle BAC \equiv \angle DCA$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind die Dreiecke BAC und DCA daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle BCA \equiv \angle DAC$. Somit entstehen beim Schnitt von $g(A,C)$ mit $g(B,C)$ und $g(D,A)$ kongruente Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz sind $g(B,C)$ und $g(D,A)$ daher parallel.

Zu Aufgabe 6.6. Nach dem SSS Kongruenzsatz sind die Dreiecke ABC und CDA kongruent, denn sie haben die Seite AC gemein und nach Voraussetzung gilt $AB \equiv CD$ und $BC \equiv DA$. Insbesondere erhalten wir $\angle CAB \equiv \angle ACD$. Da dies Wechselwinkel sind, folgt aus dem Stufenwinkelsatz $g(A,B) \| g(C,D)$. Ebenso erhalten aus der Kongruenz der Dreiecke $\angle ACB \equiv \angle CAD$ und mit dem Stufenwinkelsatz dann $g(B,C) \| g(D,A)$.

Zu Aufgabe 6.7. (a) Das Trapez in der Skizze liefert ein Gegenbeispiel. (b) Wie zuvor



folgt aus dem Stufenwinkelsatz $\angle CAB \equiv \angle ACD$. Wegen der weiteren Voraussetzung $|AC| \leq |BC|$ folgt mit dem WSS Kongruenzsatz, dass die Dreiecke ACB und CAD kongruent sind. Insbesondere erhalten wir $\angle ACB \equiv \angle CAD$. Nach dem Stufenwinkelsatz sind daher $g(B,C)$ und $g(D,A)$ parallel.

Zu Aufgabe 6.8. Da die Winkelsumme von Dreiecken $2R$ beträgt gilt:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 2R,$$
$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAC = 2R.$$

Aufgrund der Konvexität liegt C im Inneren von $\angle DAB$ und A liegt im Inneren von $\angle BCD$. Daher haben wir auch:

$$\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD,$$
$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen und anschließendes Einsetzen der anderen beiden Relationen liefert die Winkelsumme des Vierecks:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 4R.$$

Zwei (nicht konvexe) Vierecke, für die diese Relation nicht gilt sind unten abgebildet.