# Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

## 8. Übungsblatt für die Woche vom 6. bis 10. Mai 2019

Aufgabe 8.1 (Euklids Tangentenkonstruktion). Sei $\Gamma$ ein Kreis mit Mittelpunkt $M$ und $A$ ein Punkt im Äußeren von $\Gamma$.

(a) Erkläre, warum die Strecke $MA$ den Kreis $\Gamma$ in einem Punkt $B$ schneidet.
(b) Sei $t$ die Tangente an $\Gamma$ im Punkt $B$ und bezeichne $\Gamma'$ den Kreis mit Mittelpunkt $M$ durch $A$. Erkläre, warum ein Schnittpunkt $C \in \Gamma' \cap t$ existiert.
(c) Erkläre, warum $MC$ den Kreis $\Gamma$ in einem Punkt $D$ schneidet.
(d) Zeige, dass die Gerade durch $A$ und $D$ tangential an $\Gamma$ ist.

Wie bekommen wir die zweite Tangente an $\Gamma$ durch $A$?

Aufgabe 8.2 (Umkehrung des Satzes von Thales). Sei $AB$ Durchmesser eines Kreises $\Gamma$. Weiters sei $C$ ein Punkt, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige:

(a) Liegt $C$ im Inneren von $\Gamma$, dann ist $\angle ACB$ stumpf.
(b) Liegt $C$ auf $\Gamma$, dann ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.
(c) Liegt $C$ im Äußeren von $\Gamma$, dann ist $\angle ACB$ spitz.

Hinweis: Bezeichne $D$ den Schnittpunkt von $\Gamma$ mit dem Radius durch $C$. Verwende den Satz vom Außenwinkel, um $\angle ACB$ und $\angle ADB$ zu vergleichen.

Aufgabe 8.3 (Neunpunktkreis auch Feuerbachkreis). Sei $ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt $H$. Bezeichnen $M_a, M_b, M_c$ die Mittelpunkte der drei Seiten, $H_a, H_b, H_c$ die drei Höhenfußpunkte und $N_a, N_b, N_c$ die Mittelpunkte der Höhenabschnitte $HA$, $HB$, $HC$. Zeige, dass die neun Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, N_a, N_b, N_c$ auf einem Kreis liegen. Zeige dazu der Reihe nach:

(a) Die Trägergeraden der drei Strecken $AB$, $M_aM_b$ und $N_aN_b$ sind parallel.
(b) Die Trägergeraden der drei Strecken $CH_c$, $M_aN_b$ und $M_bN_a$ sind parallel.
(c) $M_aM_bN_aN_b$ bildet ein Rechteck, d.h. ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln.
(d) $M_aM_cN_aN_c$ bildet ein Rechteck.
(e) Die sechs Punkte $M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c$ liegen auf dem Kreis mit Durchmesser $M_aN_a$.
(f) $H_a$ liegt auch auf diesem Kreis.
(g) $H_b$ und $H_c$ liegen ebenfalls auf diesem Kreis.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 8.4 (Nachtrag zum Neunpunktkreis). Die Rechtecke im Beweis der vorangehenden Aufgabe können zu Strecken degenerieren.

(a) Gib ein Dreieck an, für das $C = H = H_a = H_b = N_c$, $M_a = N_b$ und $M_b = N_a$ gilt.
(b) Zeige, dass aber stets $M_a \neq M_b$, $N_a \neq N_b$ und $M_a \neq N_a$ gilt.
(c) Vervollständige den Beweis in der vorigen Aufgabe im Fall degenerierter Rechtecke.
(d) Gib ein Dreieck an, für das $H_a = M_a$ gilt.
(e) Erkläre, warum stets $H_a \neq M_b$ gilt.
(f) Kann $H_a$ mit $N_a$ zusammenfallen?

Aufgabe 8.5 (Winkelhalbierendensatz). Sei $ABC$ ein Dreieck und $D$ ein Punkt im Inneren der Seite $BC$. Zeige:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Sei $E$ der Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit der Parallelen zu $g(D, A)$ durch $C$. Zeige

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle AEC, \qquad \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE, \qquad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

und verwende eine Charakterisierung gleichschenkeliger Dreiecke aus der Vorlesung.

Aufgabe 8.6 (Außenwinkelhalbierendensatz). Sei $ABC$ ein Dreieck und seien $D, F$ zwei Punkte mit $B * C * D$ und $B * A * F$. Zeige:

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Dies lässt sich analog zum Winkelhalbierendensatz beweisen.

Aufgabe 8.7 (Kreis des Apollonius). Seien $A$ und $B$ zwei verschiedene Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda |XB|\}$$

einen Kreis bildet und drücke seinen Radius durch $\lambda$ und $\delta := |AB|$ aus.

Nimm zunächst $\lambda > 1$ an und gehe wie folgt vor:

(a) Erkläre, warum auf der Strecke $AB$ genau ein Punkt $C$ mit $|CA| = \lambda |CB|$ existiert und drücke $|CB|$ durch $\lambda$ und $\delta$ aus.
(b) Erkläre, warum auf dem Strahl $A(B\!>$ genau ein Punkt $D$ mit $|DA| = \lambda |DB|$ existiert und drücke $|DB|$ durch $\lambda$ und $\delta$ aus.
(c) Erkläre, warum auf $g(A, B)$ keine weiteren Punkte $X$ mit $|XA| = \lambda |XB|$ existieren.
(d) Drücke den Radius des Kreises $\Gamma$ mit Durchmesser $CD$ durch $\lambda$ und $\delta$ aus.
(e) Sei $X$ ein Punkt mit $|XA| = \lambda |XB|$, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige der Reihe nach: Der Strahl $(XC\!>$ halbiert den Winkel $\angle AXB$; der Strahl $(XD\!>$ halbiert den Winkel $\angle BXF$, wobei $A * X * F$; der Winkel $\angle CXD$ ist ein rechter; und $X \in \Gamma$. Schließe daraus:

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda |XB|\} \subseteq \Gamma.$$

(f) Zeige $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$, wobei $\Gamma'$ den analogen Kreis für einen weiteren Parameter $\lambda'$ mit $1 < \lambda' \neq \lambda$ bezeichnet.
(g) Verwende (f), um die umgekehrte Inklusion $\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda |XB|\} \supseteq \Gamma$ zu zeigen.

Welche Mengen erhalten wir in den Fällen $\lambda = 1$ und $0 < \lambda < 1$.

## Lösungshinweise

Zu Aufgabe 8.1. (a) Da $A$ im Äußeren von $\Gamma$ liegt. (b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede Gerade, die einen inneren Punkt eines Kreises enthält diesen Kreis in zwei Punkten schneidet. (c) Da $C$ im Äußeren von $\Gamma$ liegt. (d) Nach dem SWS-Kongruenzsatz sind die Dreiecke $AMD$ und $CMB$ kongruent. Da $\angle MBC$ ein rechter Winkel ist, muss also auch $\angle MDA$ ein rechter Winkel sein. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann $g(A, D)$ tangential an den Kreis ist, d.h. den Kreis nur in einem Punkt berührt. Bezeichnet $C'$ den zweiten Schnittpunkt von $\Gamma'$ mit $t$, und bezeichnet $D'$ den Schnittpunkt von $MC'$ mit $\Gamma$, so ist $g(A, D')$ die zweite Tangente durch $A$ an $\Gamma$.

Zu Aufgabe 8.2. (b) folgt aus dem Satz von Thales. Sei nun $C \notin \Gamma$. Beachte, dass der Mittelpunkt $M$ von $\Gamma$ im Inneren von $\angle ACB$ und auch im Inneren von $\angle ADB$ liegt. Somit

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle BCM \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle ADM + \sphericalangle BDM = \sphericalangle ADB = R.$$

Liegt $C$ im Inneren von $\Gamma$, dann folgt aus dem Satz vom Außenwinkel $\sphericalangle ACM > \sphericalangle ADM$ und $\sphericalangle BCM > \sphericalangle BDM$, also $\sphericalangle ACB > R$. Liegt $C$ im Äußeren, erhalten wir analog $\sphericalangle ACM < \sphericalangle ADM$ und $\sphericalangle BCM < \sphericalangle BDM$, also $\sphericalangle ACB < R$.

Zu Aufgabe 8.3. (a) folgt aus dem Strahlensatz.
(b) folgt aus dem Strahlensatz.
(c) Da $g(A, B)$ normal auf $g(C, H_c)$ steht, sind die vier Winkel rechte (Stufenwinkelsatz).
(d) folgt aus (c) durch Vertauschen der Rollen von $B$ und $C$, d.h. analog zu (c).
(e) folgt aus (c) und (d) mit der Umkehrung des Satzes von Thales.
(f) folgt ebenfalls aus der Umkehrung des Satzes von Thales.
(g) Auch $M_bN_b$ und $M_cN_c$ sind Durchmesser desselben Kreises, also liegen auch $H_b$ und $H_c$ auf diesem Kreis.

Zu Aufgabe 8.4. (a) Jedes Dreiecke mit rechtem Winkel $\angle BCA$ hat diese Eigenschaft.
(b) Für die Streckenmittelpunkte gilt offensichtlich $M_a \neq M_b$. Daher sind die Parallelen zu $g(H_c, C)$ durch $M_a$ und $M_b$ disjunkt. Da $N_a$ auf der Parallelen durch $M_b$ liegt, und $N_b$ auf der Parallelen durch $M_a$ liegt, erhalten wir $N_a \neq N_b$ und $M_a \neq N_a$.
(c) Ist $M_a = N_b$, dann auch $M_b = N_a$ und alle vier Punkte liegen offensichtlich auf dem Kreis mit Durchmesser $M_aN_a$.
(d) Jedes gleichschenkelige Dreieck mit $|AB| = |AC|$ hat diese Eigenschaft.
(e) Da $H_a$ und $M_b$ auf den Trägergeraden verschiedener Dreieckseiten liegen, können sie nur übereinstimmen, wenn sie mit dem gemeinsamen Eckpunkt $C$ zusammenfallen; es gilt aber stets $M_b \neq C$.
(f) Ja. Sei dazu $ABH$ ein gleichschenkeliges Dreieck mit $|AB| = |HB|$ und bezeichne $C$ seinen Höhenschnittpunkt. Ist $C \neq B$, dann bildet $ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt $H$, für das $H_a = N_a$ gilt.

Zu Aufgabe 8.5. Aus dem Stufenwinkelsatz und dem Strahlensatz erhalten wir:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle AEC, \qquad \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE, \qquad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AE|}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC \quad &\Leftrightarrow \quad \sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE \\
&\Leftrightarrow \quad |AE| = |AC| \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Äquivalenz die Charakterisierung gleichschenkeliger Dreiecke aus der Vorlesung (Satz 1.4.4) eingegangen ist.

Zu Aufgabe 8.6. Bezeichnet $E$ den Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit der Parallelen zu $g(D, A)$ durch $C$. Dann gilt wie im Beweis des Winkelhalbierendensatzes:

$$\begin{array}{ll}
\sphericalangle DAF = \sphericalangle AEC & \text{Stufenwinkelsatz} \\
\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE & \text{Stufenwinkelsatz} \\
\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE \Leftrightarrow |AE| = |AC| & \text{gleichschenkelige Dreiecke} \\
\dfrac{|DB|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AE|} & \text{Strahlensatz}
\end{array}$$

Der Satz über die Halbierende des Außenwinkels folgt durch Kombination dieser Tatsachen wie im Beweis des Winkelhalbierendensatzes.

Zu Aufgabe 8.7. (a) Für jeden Punkt $C \in (AB)$ gilt $|CA| + |CB| = |AB| = \delta$. Für diese Punkte ist die Bedingung $|CA| = \lambda|CB|$ daher zu $|CB| = \frac{\delta}{\lambda+1}$ äquivalent. Da $\lambda > 0$ haben wir $0 < \frac{\delta}{\lambda+1} < \delta$, also existiert genau ein solcher Punkt $C$ im Inneren der Strecke $AB$.

(b) Für jeden Punkt $D$ am Strahl $A(B>$ gilt $|DA| = |DB| + |AB| = |DB| + \delta$. Für diese Punkte ist die Bedingung $|DA| = \lambda|DB|$ daher zu $|DB| = \frac{\delta}{\lambda-1}$ äquivalent. Da $\lambda > 1$ haben wir $\frac{\delta}{\lambda-1} > 0$, also existiert genau ein solcher Punkt $D$ am Strahl $A(B>$.

(c) Liegt $X$ am Strahl $<A)B$, dann gilt $|XA| < |XB|$, was $|XA| = \lambda|XB| > |XB|$ widerspricht. Für $X = A$ oder $X = B$ ist die Gleichung $|XA| = \lambda|XB|$ offensichtlich nicht erfüllt.

(d) Der Durchmesser von $\Gamma$ ist $|CB| + |DB| = \frac{\delta}{\lambda+1} + \frac{\delta}{\lambda-1} = \frac{2\lambda\delta}{\lambda^2-1}$, sein Radius daher $\frac{\lambda\delta}{\lambda^2-1}$.

(e) Aus dem Satz über die Winkelhalbierende erhalten wir

$$\sphericalangle BXA = 2\sphericalangle BXC.$$

Aus dem Satz über die Halbierende des Außenwinkels erhalten wir

$$\sphericalangle BXF = 2\sphericalangle BXD,$$

wobei $F$ einen Punkt mit $A * X * F$ bezeichnet. Addition der beiden Gleichungen liefert

$$2R = \sphericalangle BXA + \sphericalangle BXF = 2(\sphericalangle BXC + \sphericalangle BXD),$$

also $R = \sphericalangle BXC + \sphericalangle BXD$. Aus der Umkehrung des Satzes von Thales folgt $X \in \Gamma$.

(f) O.B.d.A. sei $\lambda' > \lambda$. Dann gilt $|C'B| = \frac{\delta}{\lambda'+1} < \frac{\delta}{\lambda+1} = |CB|$ und $|D'B| = \frac{\delta}{\lambda-1} < \frac{\delta}{\lambda-1} = |DB|$. Daher ist der Durchmesser $[C'D']$ von $\Gamma'$ zur Gänze im Durchmesser $(CD)$ von $\Gamma$ enthalten, woraus sofort $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$ folgt.

(g) Sei $X \in \Gamma$. Dann gilt $|XA| = \lambda'|XB|$, wobei $\lambda' := \frac{|XA|}{|XB|} > 1$. Aus (e) erhalten wir $X \in \Gamma'$. Nach (f) ist dies nur möglich, wenn $\lambda = \lambda'$ gilt. Somit $|XA| = \lambda|XB|$.