Lineare Algebra und Geometrie für das Lehramt

VO 250159 Sommersemester 2022

(Stefan Haller)

1. Prüfungstermin am 28. Juni 2022

von 7:30 bis 9:00 Uhr (90 Minuten)

am Oskar-Morgenstern-Platz 1

in Hörsaal 1

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punktezahl							
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	gesamt
Punkte:							

Notenskala					
Punkte:	0–24	24–30	30–36	36–42	42–48
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

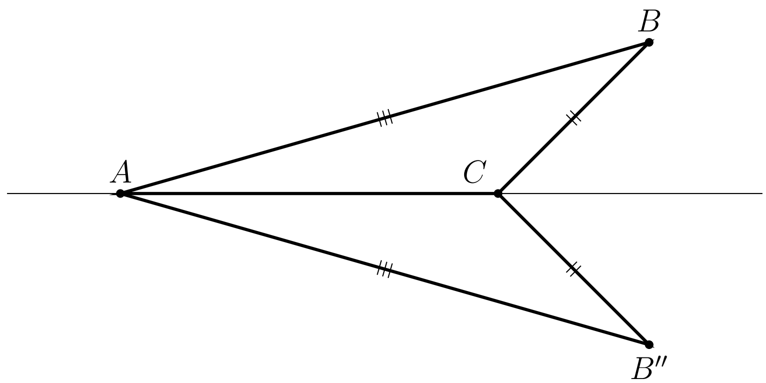
1. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Formuliere den Seiten-Seiten-Seiten-Kongruenzsatz für Dreiecke. **(2P)**

(b) In Hilberts Beweis des Seiten-Seiten-Seiten-Kongruenzsatzes werden ein Dreieck ABC und ein weiterer Punkte B'' auf der anderen Seite von $g(A, C)$ wie B betrachtet, sodass

$$AB \equiv AB'' \qquad \text{und} \qquad CB \equiv CB''.$$

Betrachte nun den, in der Skizze angedeuteten Fall, wo C im Inneren des Winkels $\angle ABB''$ liegt. Zeige, dass die Dreiecke ABC und $AB''C$ kongruent sind. **(4P)**



(c) Für welche $c > 0$ existiert ein Dreieck ABC mit Seitenlängen

$$|BC| = 2, \qquad |CA| = 7 \qquad \text{und} \qquad |AB| = c?$$

Beschreibe die Menge aller c mit dieser Eigenschaft. **(2P)**

2. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Formuliere den Strahlensatz. **(2P)**
(b) Zeige, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(6P)**

3. Aufgabe (8 Punkte)

Seien A, B, C, D vier Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x(D) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das Teilverhältnis $\frac{AB}{BC}$. **(2P)**

(b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABD. **(2P)**

(c) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes E auf der Geraden durch A und C an, der Teilverhältnis $\frac{AE}{EC} = -4$ hat. **(2P)**

(d) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes F an, der Normalabstand 5 von der Geraden durch A und B hat. **(2P)**

4. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(4P)** das Additionstheorem für den Kosinus.

(b) Erkläre, wie aus dem Additionstheorem die Doppelwinkelformel

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

folgt. **(1P)**

(c) Gib Zahlen p, q, r an, sodass die Formel

$$\cos(4\alpha) = p\cos^4(\alpha) + q\cos^2(\alpha) + r$$

für alle Winkel α gilt. **(2P)**

5. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter der Dimension eines Teilraums von $\mathbb{R}^n$? **(1P)**
(b) Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$? **(1P)**
(c) Beweise die Dimensionsformel in (b). **(4P)**
(d) Erkläre, warum keine injektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ existiert. **(2P)**

6. Aufgabe (8 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcr} x_1 & & +x_3 & -x_4 & & -2x_6 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & -x_4 & +3x_5 & -3x_6 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & +3x_5 & -x_6 & = & 4 \\ 2x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & & -4x_6 & = & -4 \end{array}$$

(a) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(2P)**

(b) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(2P)**

(c) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(2P)**

(d) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in vier Variablen x, y, z, w an, das einen 2-dimensionalen Lösungsraum hat. **(2P)**