

Ab nun bearbeiten wir Aufgaben zum Stoff der VO *Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie* und alle Inhalte der StEOP-Phase (VO+UE+Workshops) werden prinzipiell als bekannt vorausgesetzt, auch wenn gelegentlich einzelne Aspekte wiederholt werden. Aus diesen zusammen mit dem wochenweise wachsenden Stoff der laufenden VO und den nummerweise davor liegenden UE-Aufgaben sind jeweils die Aufgaben für die UE-Einheiten der folgenden Woche(n) zu bearbeiten (d.h. Lösungsideen aus anderen Quellen müssen zumindest in dieses logische Gefüge eingepasst werden, wenn Sie die Reinschrift für eine konsistente Lösung machen).

Die gestellten Aufgaben sind nur als Minimum an Vorschlägen dafür aufzufassen, was zum Einüben und Verdauen des VO-Stoffes empfohlen wird. Für einen richtig guten Übungseffekt sollten Sie selbst regelmäßig deutlich mehr probieren. Als Quellen für zusätzliches Material eignen sich z.B. die einschlägigen Bücher von Kowalsky-Michler, Stoppel-Griese, G. Fischer, Zieschang, Jänich (hier insbesondere auch die Tests) und weitere Bücher, Skripten oder Online-Aufgabensammlungen nach Geschmack und Laune. Sie müssen dabei halt immer berücksichtigen, dass der Stoff eben teilweise in einer veränderten Reihenfolge aufgebaut wird. (Einige Aufgaben sind ja mit mehr Theorie im Hintergrund besonders rasch zu lösen, sind aber im spezifischen logischen Kontext eventuell absichtlich mit mehr Aufwand verbunden, also in gewisser Hinsicht „anders gemeint“.) Übrigens sind dieselben Aspekte ja auch beim Zusammenstellen dieser UE-Aufgaben relevant und die Quellenlage dazu ist sogar äußerst diffus (und zum Zeitpunkt dieses ersten Übungsblattes sowieso noch unbekannt): Ausgebeutet werden wahrscheinlich neben Waldmanns Lehrbuch und den bereits genannten Büchern diverse Aufgabensammlungen von KollegInnen, vielleicht auch noch weitere Bücher (über Lineare Algebra, Algebra, Mathematikurse für Physik oder für technische Fächer) u.a. von H. Anton, Axler, Scheja-Storch, Koecher, Meyberg-Vachenauer, Wuest ... und darüberhinaus werden wohl auch die (wenigen) „selbsterfundene“ UE-Aufgaben mit Sicherheit trotzdem schon mal woanders vorgekommen sein.

Schließlich gestehen wir Ihnen zu, im Laufe der UE und VO während fruchtbarer¹ Krisen so zu empfinden wie in der folgenden Beschreibung, die ich dem Vorspann des Buches *Stochastic Differential Equations* von Bernt Øksendal, Springer-Verlag, 5. Auflage 1998, entnommen habe (zur Quellenfrage siehe den *Quote Investigator* im World Wide Web):

„We have not succeeded in answering all our problems. The answers we have found only serve to raise a whole set of new questions. In some ways we feel we are as confused as ever, but we believe we are confused on a higher level and about more important things.“

.....

Außerdem noch ein Geständnis: Wir weichen hier von einer Konvention der StEOP-VO (und auch von der DIN) ab, indem wir ab nun folgende Notation vereinbaren

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

¹Kein Tippfehler! Denn furchtbare Krisen wünscht Ihnen niemand, aber die fruchtbaren werden alle erfolgreichen Studentinnen und Studenten mit Sicherheit durchleben müssen.

Aufgaben zum Kapitel A „Vorgeplänkel“ (bzw. zu Waldmanns Kapiteln 1 und 3)

51 Es sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $W_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ die Menge der (komplexen n -ten) *Einheitswurzeln*.

(a) Zeigen Sie — ohne die explizite Gestalt der Elemente von W_n zu verwenden — dass $W_n \subseteq S^1$ gilt und W_n mit der von \mathbb{C} vererbten Multiplikation eine Untergruppe der kommutativen Gruppe (\mathbb{C}^*, \cdot) bildet.

(b) Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Elemente von W_n explizit in Polardarstellung an und machen Sie (grobe) Skizzen von $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6$. Zeigen Sie, dass (W_n, \cdot) isomorph zur Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist.

52 Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ jene Ebene, die die drei Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ enthält. Geben Sie für E sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine gleichungsdefinierte Variante an.

53 Es sei $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ die von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Weisen Sie mit Hilfe von Normalvektoren nach, dass E_1 und E_2 nicht parallel liegen, und bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden.

54 Es seien $m, n \in \mathbb{R}^3$ und $a := n \times m$. Zeigen Sie: m und n sind parallel $\iff a = 0$.

55 Wir betrachten das sogenannte *Spatprodukt*, d.h. die Abbildung $S: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$S(a, b, c) := \langle a, b \times c \rangle \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^3).$$

Die Zahl $S(a, b, c)$ lässt sich u.a. auf Grund der folgenden Eigenschaften als (orientiertes) Volumen des von a, b, c aufgespannten Parallelepipeds interpretieren. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ stets gilt:

- (a) $S(a, b, c) = 0$, falls zwei der Vektoren parallel sind;
- (b) $S(\lambda a + \mu d, b, c) = \lambda S(a, b, c) + \mu S(d, b, c)$ und $S(a, c, b) = -S(a, b, c) = S(b, a, c)$.

56 Verwenden Sie eine Eigenschaft von S aus der vorigen Aufgabe sowie die Graßmann-Identität des Kreuzproduktes, um $\langle a \times b, c \times d \rangle$ ohne Rückgriff auf die Komponenten der Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ zu berechnen. Leiten Sie daraus (ohne langwierige Komponentenrechnungen) die folgende bekannte Formel her, wobei γ der Winkel zwischen a und b ist:

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \gamma.$$

- 57** (a) Führen Sie die Division mit Rest von $7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x$ durch $x^2 + 1$ aus.
- (b) Erraten Sie eine ganzzahlige² Nullstelle von $3x^4 - 2x^3 + 3x - 2$ und dividieren Sie durch den entsprechenden Linearfaktor.

²Vielleicht kennen Sie oder wollen hierzu auch den sogenannten *Wurzelsatz von Vieta* nachschauen?

Aufgaben zum VO-Kapitel B Praktisches Lösen von linearen Gleichungssystemen (bzw. Waldmanns Kapitel 4, Abschnitt 1)

Entscheiden Sie in allen Aufgaben dieses Kapitels jeweils die Lösbarkeit, indem Sie das Gleichungssystem mittels Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform bringen. Bestimmen Sie dann gegebenenfalls die Lösungsmenge in \mathbb{K}^m in Parameterform.

58 Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

59 Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 3 \\ -3x_1 - 5x_3 - 10x_4 &= 5 \end{aligned}$$

60 Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 - x_5 &= 8 \end{aligned}$$

61 Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (2-i)z_3 &= 2+i \\ (1+i)z_1 + 3iz_3 &= 1+4i \\ -2z_1 + (1-i)z_2 + (1+2i)z_3 &= i \end{aligned}$$

62 Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Für welche $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

lösbar? Berechnen Sie in diesen Fällen die Lösung in Abhängigkeit von b_1, b_2, b_3 .

63 Vergleichen Sie die Lösungsmengen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y - z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

für $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist. Was erhalten wir, falls wir die Koeffizienten im obigen Gleichungssystem als Restklassen in $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ interpretieren (also $\bar{0}$ statt 0 , $\bar{1}$ statt 1 und $-\bar{1}(=\bar{1})$ statt -1 nehmen) und Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3$ suchen?

[Freiwillige Fleißaufgabe: Und wie ist das nun wiederum mit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl $p \geq 3$? (Beachte aber nun bei der Interpretation des Gleichungssystems, dass $-\bar{1} = \overline{p-1}$ in \mathbb{Z}_p gilt.)]

Aufgaben zum VO-Kapitel C Vektorräume und Basen (Waldmann 4.2-5)

64 Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und M eine nichtleere Menge. Wie in der VO erwähnt, können wir auf der Menge $\text{Abb}(M, V)$ aller Abbildungen $M \rightarrow V$ eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren punktweise aus den entsprechenden Operationen auf V definieren, indem wir für $f, g \in \text{Abb}(M, V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in M$ setzen

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x).\end{aligned}$$

(Machen Sie sich nochmal klar, dass hier jeweils auf der rechten Seite für jedes eingesetzte Argument x eine Operation auf dem Vektorraum V verwendet wird, um dadurch punktweise die Operationen auf Ebene der Abbildungen zu definieren.) Begründen bzw. beantworten Sie:

(a) $\text{Abb}(M, V)$ wird mit diesen Operationen zu einem Vektorraum über \mathbb{K} . Was ist der Nullvektor in diesem Vektorraum?

(b) Wenn U ein Teilraum von V ist, dann ist $\{f \in \text{Abb}(M, V) \mid f(M) \subseteq U\}$ ein Teilraum von $\text{Abb}(M, V)$.

65 Begründen Sie aus entsprechenden Eigenschaften von Suprema und Limiten¹, warum die folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen auch Teilräume sind:

(a) die Menge $l^\infty := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ der beschränkten Folgen;

(b) die Menge c der konvergenten Folgen.

¹Evtl. kommt der Begriff des Limes in der Analysis-VO erst ein bisschen später dran, aber Sie sollten hierfür auch mit Schulwissen auskommen. Außerdem illustriert dann zumindest diese Aufgabe schon vorweg einen wichtigen strukturellen Aspekt des entsprechenden Ergebnisses aus der Analysis.

66 Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 sind Teilräume? Begründen Sie Ihre Antworten und skizzieren Sie für die Aufgaben (a-f) die betreffenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 :

- (a) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$,
- (b) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$,
- (c) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$,
- (d) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 - x_2 = 0\}$,
- (e) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2^2 = 0\}$,
- (f) $\{(x_1, x_2) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x_1 = 3\lambda, x_2 = -2\lambda\}$,
- (g) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\}$,
- (h) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_3 = 0 \text{ und } x_2^4 = 0\}$.

67 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}[x]$ sind Teilräume? (Begründungen!)

- (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq n\}$,
- (b) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(17) = 0\}$,
- (c) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}$,
- (d) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) = 4\}$,
- (e) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) = 0\}$,
- (f) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 5 \text{ und } p(1) = 0\}$.

68 Seien $b_1 = x^2$, $b_2 = -2x^2 + 2x$, $b_3 = x^2 - 2x + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ gegeben.

- (a) Was ergibt $\text{span}\{b_1, b_2, b_3\}$?
- (b) Ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig?

69 Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$ linear unabhängig im \mathbb{R}^3 ?

- 70** (a) Finden Sie vier Vektoren im \mathbb{R}^3 , so dass je drei von ihnen linear unabhängig sind.
- (b) Sei p eine Primzahl. Ist $\{1, \sqrt{p}\}$ linear unabhängig in \mathbb{R} als Vektorraum über \mathbb{Q} ?

71 Begründen Sie: (a) Wir können \mathbb{C}^n als Vektorraum über \mathbb{C} oder auch über \mathbb{R} auffassen. (b) Sind Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig über \mathbb{C} , dann auch über \mathbb{R} . (Was ist jeweils die Dimension von \mathbb{C}^n als Vektorraum über \mathbb{C} bzw. \mathbb{R} ?)

(c) Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ linear abhängig über \mathbb{C} sind, aber linear unabhängig über \mathbb{R} .

72 Zeigen Sie, dass die Menge der Monome $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis für $\mathbb{K}[x]$ ist.

73 Es sei $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist B ein Erzeugendensystem für \mathbb{R}^4 ? Kann es Erzeugendensystem für einen dreidimensionalen Teilraum des \mathbb{R}^4 sein? Ist es überhaupt ein Erzeugendensystem für irgendeinen Teilraum des \mathbb{R}^4 ? Wenn ja, welche Dimension hat der?

74 Kann die Menge $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des \mathbb{R}^4 ergänzt werden? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, wie?

Freiwillige Zusatzaufgabe Es sei $\{p_1, p_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen.

Ist die Menge $\{\log(p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig in \mathbb{R} als Vektorraum über \mathbb{Q} ?

Zur Verfügung gestellt von:
 Günther Hörmann
 UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
 WiSe 2018/19
 LV-Nr.: 250014
 Fakultät für Mathematik, Universität Wien
 Danke!

75 Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und U ein Teilraum von V . Zeigen Sie:

- (a) $\dim U \leq \dim V$;
- (b) $\dim U = \dim V \iff U = V$.

76 Welche Dimension haben jeweils die Teilräume in den Aufgaben (a) 66 bzw. (b) 67.

77 Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ sowie $w_1, \dots, w_m \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

- (a) Zeigen Sie: $m > n \implies w_1, \dots, w_m$ linear abhängig.
(Hinweise: Welches Resultat aus der VO wird hier verstärkt? Zusammen mit welchem nachfolgenden Satz der VO ergibt sich ein sehr einfacher Beweis der obigen Behauptung?)
- (b) Was wissen wir über v_1, \dots, v_n , falls $m = n$ ist und w_1, \dots, w_m linear unabhängig sind?

78 Es sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

- (a) Zeige, dass B eine Basis ist.
- (b) Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombination aus B dar.

79 Es sei U der Teilraum von $\mathbb{R}[x]$ bestehend aus den Polynomen vom Grad höchstens 2 und $A := \{x^2 - 5, 2x^2 - 3x - 4, x - 2, 2x^2 + 5x + 1\} \subset \mathbb{R}[x]$.

- (a) Ist A linear unabhängig? Oder entsteht durch Wegnahme eines geeigneten Polynoms eine linear unabhängige Menge?
- (b) Ist A ein Erzeugendensystem für U ? Wenn ja, geben Sie eine Teilmenge von A an, die eine Basis von U ergibt.

80 Es sei $U \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Teilmenge der ungeraden Abbildungen, d.h. U besteht aus allen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-x) = -f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass U ein Teilraum ist und $G := \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}: g(-x) = g(x)\}$ ein Komplementärraum für U ist.

81 Es sei $U_1 := \{(x, y, z) \mid 3x + 4y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Ist U_1 ein Teilraum? Welcher Dimension? Gibt es einen Teilraum U_2 von \mathbb{R}^3 , sodass $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$ gilt? Wie kann so ein U_2 angegeben werden? Geben Sie schließlich einen zweidimensionalen Teilraum W von \mathbb{R}^3 an, sodass $\mathbb{R}^3 = U_1 + W$ gilt. Kann dies auch durch eine direkte Summe erreicht werden?

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
WiSe 2018/19
LV-Nr.: 250014
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Zu Kapitel D Lineare Abbildungen und Matrizen (Waldmann 5.1-5)

Zwischendurch ein kräftig Wörtlein (wie Mephistopheles sich gelegentlich ausdrückt) aus dem Appendix über „Anfangsgründe der linearen Algebra“ im Buch *Grundzüge der modernen Analysis*, Band 1, 2. Auflage 1972 im Vieweg-Verlag, von Jean Dieudonné:

„Mit Ausnahme der Booleschen Algebra wird keine Theorie in der Mathematik universeller benutzt als die lineare Algebra. Es gibt kaum eine Theorie, die elementarer ist, trotz der Tatsache, daß Generationen von Professoren und Lehrbuchautoren die Einfachheit dieser Theorie durch höchst unangebrachte Rechnungen mit Matrizen verdunkelt haben.“

82 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

- (a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0, 3x_1 - 2x_2),$
- (b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0, 3x_1 - 2),$
- (c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2^2, x_2),$
- (d) $\varphi_4 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (e^{x_1}, x_2x_3, \cos x_4),$
- (e) $\varphi_5 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (3x_4, 5x_2 - x_3).$

83 Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- (a) Für fixes $a \in \mathbb{K}^n$ betrachte $P_a : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$
- (b) Für fixes $b \in \mathbb{K}^n$ betrachte $T_b : \text{Abb}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ mit $(T_b f)(x) = f(x + b).$
- (c) Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}.$
- (d) Wie (c), aber mit \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum aufgefasst.

84 Wir betrachten die folgenden Abbildungen D und S von $\mathbb{R}[x]$ nach $\mathbb{R}[x]$, wobei

$$D(a_nx^n + \dots + a_1x + a_0) = na_nx^{n-1} + \dots + 2a_2x + a_1,$$

$$S(a_nx^n + \dots + a_1x + a_0) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x.$$

- (a) Sind D und S linear? Berechnen Sie $S \circ D$ sowie $D \circ S.$
- (b) Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild von D und $S.$

[Bemerken einer Analogie zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nicht unerwünscht.]

85 Wir betrachten die beiden Abbildungen Q und P von $\mathbb{C}[x]$ nach $\mathbb{C}[x]$, gegeben durch

$$P(a_nx^n + \dots + a_1x + a_0) = -i \cdot (na_nx^{n-1} + \dots + 2a_2x + a_1) \text{ und } Q(p) = x \cdot p \text{ (} p \in \mathbb{C}[x]\text{)}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass beide Abbildungen linear sind.
- (b) Argumentieren Sie, warum der Kommutator $[Q, P] := Q \circ P - P \circ Q$ ebenfalls eine lineare Abbildung $\mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ ist und berechnen Sie diesen explizit.

[Hier ergibt sich eine „Spielart der Heisenberg-Relation zwischen Orts- und Impulsoperator“.]

86 Sei V der \mathbb{R} -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 und $\varphi : V \rightarrow V$ definiert durch $\varphi(p) := p - p'$, wobei $p' := Dp$ ist mit D wie in **84**. Zeigen Sie auf zwei Arten, dass φ injektiv und surjektiv ist:

(a) Nur mit allgemeinem Wissen über Abbildungen und Polynome, das heißt durch expliziten Nachweis, dass für $p, q \in V$ aus $p - p' = q - q'$ die Beziehung $p = q$ folgt und für jedes gegebene Polynom $r = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in V$ die Gleichung $p - p' = r$ ein Polynom $p \in V$ als Lösung hat.

(b) Mit der Beobachtung, dass φ linear ist und die die Injektivität bzw. Surjektivität viel einfacher mit Hilfe passender Sätze aus der Vorlesung geschlossen werden kann.

87 Sind die folgenden Abbildungen linear? Sind sie injektiv? Sind sie surjektiv?

(a) $f: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2, (x, y, z) \mapsto (x^2 + 2xz + z^2 + x + z, x^2 + y^2 + z^2)$

(b) $g: c \rightarrow \mathbb{R}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_{n+100} - 2a_n)$

(c) $h: l^\infty \rightarrow \mathbb{R}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

88 Bestimmen Sie Kern und Bild

(a) der linearen unter allen Abbildungen in Aufgabe **82**,

(b) der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (4x - 2z, 3y + 4z)$.

89 Es seien V und W Vektorräume über \mathbb{K} und $f, g: V \rightarrow W$ linear.

(a) Ist die Teilmenge $\{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$ ein Teilraum von V ? (Begründung!)

(b) Für den Fall $V = W$ zeigen Sie: $\ker(g \circ f) = \ker f \iff (\ker g) \cap (\operatorname{im} f) = \{0\}$.

Zur Verfügung gestellt von:
 Günther Hörmann
 UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
 WiSe 2018/19
 LV-Nr.: 250014
 Fakultät für Mathematik, Universität Wien
 Danke!

Keine Aufgabe für Tafeldiskussionen Ich gebe hier nicht kunterbunte Matrizen in diversen Größen an, gespickt mit würzigen Einträgen (d.h. Komponenten, Koeffizienten), um Sie dann zu fragen, welche davon man in was für einer Reihenfolge multiplizieren oder addieren darf/kann/soll ... aber berechnen Sie zum Aufwärmen (am besten mal für sich allein) das Produkt $A \cdot B$ für die folgenden Matrizen A, B (und vergleichen dann):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

90 Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang der folgenden linearen Abbildungen:

(a) $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$,

(b) $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(x) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$.

91 (a) Geben Sie zu den linearen Abbildungen aus Aufgaben 82 und 83(a) jeweils die Matrix bezüglich der Standardbasen an.

(b) Geben Sie zu den linearen Abbildungen aus Aufgabe 83(c-d) jeweils die Matrix bezüglich selbst gewählter geordneter Basen an.

92 Berechnen Sie für die folgenden Matrizen A jeweils alle Potenzen A^n für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

93 (a) Erinnern Sie sich an (oder besorgen Sie sich) die Additionstheoreme für Winkel-funktionen und berechnen Sie das folgende Matrixprodukt, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig sind:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie eine Regel für die Multiplikation zweier Diagonalmatrizen¹ an, das heißt, berechnen Sie folgendes Matrixprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

¹also quadratische Matrizen, bei denen alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonale 0 sind

94 (a) Was können Sie über das Produkt $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ zweier sogenannter Blockmatrizen sagen? (Das Symbol $*$ bezeichnet hier beliebige, i.A. verschiedene Einträge.)

(b) Betrachten Sie für $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ die Matrixprodukte

$$B := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot A \quad \text{und} \quad C := A \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_m \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, warum B einfach aus A entsteht, indem jeweils die i -te Zeile mit λ_i multipliziert wird ($i = 1, \dots, n$). Was lässt sich im Vergleich dazu über C sagen?

95 Sei V jener Teilraum von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der von den beiden Funktionen g_1, g_2 erzeugt wird, wobei $g_1(t) := e^{2t} \sin 3t$ und $g_2(t) := e^{2t} \cos 3t$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie zunächst, dass die beiden Funktionen linear unabhängig sind und somit (g_1, g_2) eine geordnete Basis B von V ist. Bestimmen Sie die Matrix ${}_B[\varphi]_B$ der linearen Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$, $\varphi(f) := f'' - 2f$.

96 Ist die folgende Matrix invertierbar? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Inverse²:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

97 Bestimmen Sie für φ aus Aufgabe **86** die Matrixdarstellungen ${}_B[\varphi]_B$ und ${}_B[\varphi]_C$ bzgl. der geordneten Basen $B = (1, x, x^2, x^3)$ und $C = (x - 1, 2x, x^3 - x^2, x^2 + x^3)$.

98 Es sei $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasen gegeben. Zeigen Sie zunächst, dass $A = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ bzw. $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ geordnete Basen in \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 definieren. Bestimmen Sie dann die Matrixdarstellung ${}_B[\varphi]_A$ sowie die Koordinaten des Bildvektors von $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. B .

Zur Verfügung gestellt von:
 Günther Hörmann
 UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
 WiSe 2018/19
 LV-Nr.: 250014
 Fakultät für Mathematik, Universität Wien
 Danke!

²Und machen am besten auch die Probe!

„Quer durch den Gemüsegarten“ (Kapitel B-D bzw. Waldmann 4.1 bis 5.5)

99 Zeigen Sie, dass die Menge $H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ eine Untergruppe der $GL_3(\mathbb{R})$ bildet, die ebenfalls nicht kommutativ ist. Bestimmen Sie dann das sogenannte Zentrum $Z := \{A \in H \mid \forall B \in H: AB = BA\}$ der Gruppe H und zeigen Sie, dass Z eine kommutative Untergruppe ist. [H ist die (universelle Überlagerung der) Heisenberggruppe.]

100 Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $v_1, \dots, v_m \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Ist $w \in V$ und $v_1 + w, \dots, v_m + w$ linear abhängig, dann gilt $w \in \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$. Gilt auch die Umkehrung?

101 (a) Gibt es eine Basis von $P_3 := \{p \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$, sodass keines der Basispolynome den Grad 2 hat?

(b) Es sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis des \mathbb{K} -Vektorraums V . Zeigen Sie, dass dann

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$$

ebenfalls eine Basis von V ist.

102 Sei $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}$.

(a) Geben Sie eine Basis für U an.

(b) Erweitern Sie die Basis aus (a) zu einer Basis von \mathbb{R}^5 .

(c) Geben Sie einen Teilraum W von \mathbb{R}^5 an, sodass $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ gilt.

103 (a) Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $v_1, \dots, v_m \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Für jedes $w \in V$ gilt $\dim \text{span}\{v_1 + w, \dots, v_m + w\} \geq m - 1$.

(b) Seien $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{K}[x]$ mit $\deg(p_j) = j$ für $j = 0, \dots, m$. Zeigen Sie, dass dann p_0, p_1, \dots, p_m eine Basis des Teilraums $P_m := \{p \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(p) \leq m\}$ ist.

104 (a) Es seien U und W zwei vierdimensionale Teilräume von \mathbb{C}^6 . Zeigen Sie, dass $U \cap W$ zumindest zwei Vektoren enthalten muss, die nicht parallel sind.

(b) Es seien U und W zwei fünfdimensionale Teilräume des \mathbb{R}^9 . Zeigen Sie, dass $U \cap W$ einen Vektor ungleich 0 enthalten muss.

(c) Es seien U und W Teilräume des \mathbb{R}^8 mit $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ und $\mathbb{R}^8 = U + W$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{R}^8 = U \oplus W$ gilt.

105 Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} :

(a) Seien $m \in \mathbb{N}$ und v_1, \dots, v_m paarweise verschiedene Vektoren aus V , weiters setzen wir $A := \{v_1, \dots, v_m\}$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $T: \mathbb{K}^m \rightarrow V$ mit $T(x_1, \dots, x_m) = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$. Unter welcher Bedingung an A ist T injektiv bzw. surjektiv?

(b) Sei nun W ein weiterer \mathbb{K} -Vektorraum und $\Phi \in L(V, W)$. Zeigen Sie, dass es einen Teilraum U von V mit den Eigenschaften $U \cap \ker \Phi = \{0\}$ und $\text{im } \Phi = \{\Phi u \mid u \in U\}$ gibt.

106 Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) Seien $\varphi, \psi: V \rightarrow \mathbb{K}$ linear und $\varphi, \psi \neq 0$. Zeigen Sie: $\ker \varphi = \ker \psi \iff \exists c \in \mathbb{K}: \psi = c\varphi$.

(b) Seien $S, T \in L(V)$. Zeigen Sie: ST invertierbar $\iff S$ und T invertierbar.

In diesem Fall ist $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

107 Die *Spur* (englisch: trace) einer quadratischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit Eintragungen a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) ist definiert durch $\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (Summe der Diagonaleintragen). Zeigen Sie: (a) $\text{tr}: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ist linear, (b) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

108 (a) Berechnen Sie die Basiswechsel von A nach B und umgekehrt für die geordneten Basen $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ und $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ des \mathbb{R}^3 .

(b) Wir betrachten die lineare Abbildung $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie zunächst ${}_A[\Phi]_A$ und daraus dann ${}_B[\Phi]_B$ mittels der Matrizen aus (a).

109 Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{R} sowie $\Phi: V \rightarrow W$ linear. Bezüglich je einer geordneten Basis B und C von V bzw. W habe Φ die Matrixdarstellung

$${}_C[\Phi]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & -12 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren bzgl. B zu einer Basis von $\ker \Phi$.

(b) Von den Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ seien die Koordinaten bzgl. B bekannt, nämlich

$${}_B[v_1] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_B[v_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad {}_B[v_3] = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildvektoren bzgl. C , d.h. ${}_C[\Phi v_j]$ ($j = 1, 2, 3$).

(c) Bestimmen Sie die Dimension des Teilraumes $U := \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ von V sowie des Teilraumes $\Phi(U) = \{\Phi u \mid u \in U\}$ von W .

110 Gegeben sei die lineare Abbildung $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & -4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie mittels Gauß-Algorithmus den Rang von A und bestimmen Sie dann den Kern von A . Können Sie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ angeben, der nicht zum Bild von A gehört?

111 Für welche Werte des Parameters $z \in \mathbb{C}$ sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & z^2 \\ 1 & z^2 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & z & 4 + 8i \\ 1 - i & 4 & 2 + z \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

invertierbar?

112 (a) Verifizieren Sie, dass eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar ist, wenn $\Delta := ad - bc \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} in dem Fall explizit. (Und es sei empfohlen, sich die entstehende Formel zu merken. [„ $\frac{1}{\Delta}$, auf der Diagonale Platztausch, Minus bei den anderen“.])

(b) Zeigen Sie, dass eine $((2n) \times (2n))$ -Matrix in Blockform $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (also mit quadratischen Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ und 0 die $(n \times n)$ -Nullmatrix) genau dann invertierbar ist, wenn A und B invertierbar sind, und in diesem Fall die Inverse von der Form $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ ist.

[Hinweis: Eine Richtung ist leicht; bei der Rückrichtung können Sie für die Inverse $\begin{pmatrix} X & R \\ S & Y \end{pmatrix}$ ansetzen und durch blockweise Matrixmultiplikation zunächst ableiten, dass A und B invertierbar sind und wie X und Y aussehen müssen; danach können auch R und S festgenagelt werden.]

Abschließend noch ein Textauszug aus dem Abschnitt Nr. 130 (im Rahmen eines historischen Schlusskapitels) des Buches *Funktionalanalysis* von Harro Heuser, 2. Auflage 1986 im Teubner-Verlag:

„Zunächst aber müssen wir den Beitrag Peanos schildern. Diesen ungewöhnlich scharfsinnigen Mann kennt jeder Mathematiker als Erfinder eines völlig durchsichtigen Axiomensystems der natürlichen Zahlen und einer völlig undurchsichtigen „Peanokurve“. Weniger bekannt ist seine Leistung in der mathematischen Logik und weitgehend unbekannt seine Erfindung des abstrakten Vektorraumes und der linearen Operatoren, zweier Grundbegriffe der späteren Funktionalanalysis. 1888 veröffentlichte Peano in Turin sein Buch *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. Angeregt durch die dunkle und deshalb weitgehend wirkungslos gebliebene „Ausdehnungslehre“ Grassmanns stellt dieser große Logiker im 9. Kapitel ein System von Axiomen auf, das mit dem heutzutage üblichen des Vektorraumes fast identisch ist und das man vor ihm nicht findet.“

Zur Verfügung gestellt von:
 Günther Hörmann
 UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
 WiSe 2018/19
 LV-Nr.: 250014
 Fakultät für Mathematik, Universität Wien
 Danke!