UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 1

Zu Kapitel $\boxed{\text{E}}$ Ergänzende Konstruktionen

(d.h. Dualräume, Bilinearformen, Quotientenräume)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V^* sein Dualraum. Für einen Teilraum U von V definieren wir den sogenannten Annihilator von U durch

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für jedes } u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass U^0 ein Teilraum von V^* ist und für Teilräume U_1, U_2 von V stets die Gleichung $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$ gilt.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (Vorweg eine Erinnerung: In dieser VO ist weiterhin $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und U ein Teilraum von V. Zeigen Sie, dass folgende Dimensionsformel gilt:

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U.$$

(Hinweis: Beginnen Sie mit einer Basis von U; ergänzen Sie diese zu einer Basis von V und betrachten eine geeignete Teilmenge der dazu dualen Basis in V^*.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (Minkowski-Raum) Es sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$. Wir betrachten die Abbildung $\eta\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\eta((t_1, x_1, y_1, z_1), (t_2, x_2, y_2, z_2)) := -c^2 t_1 t_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Zeigen Sie, dass η eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie die Matrix von η bezüglich der Standardbasis an.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Wir erinnern (vgl. Aufgabe $\boxed{107}$ im WS 18) an die Definition der *Spur* einer quadratischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit Eintragungen a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$, nämlich $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie, dass $S\colon M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $S(A, B) := \operatorname{tr}(A \cdot B^T)$ eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $M_n(\mathbb{K})$ definiert. Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten Sie speziell die Werte $S(A, A)$ und folgern daraus, dass S nichtausgeartet ist.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und U ein k-dimensionaler Teilraum von V mit $1 \leq k < n$. Zeigen Sie: Ist $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U und $v_1 + U, \ldots, v_{n-k} + U$ eine Basis von V/U, dann ergibt $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}$ eine Basis von V.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$. Zeigen Sie: $\dim(V/\ker\varphi) = 1$.

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 2

Zu Kapitel $\boxed{\text{F}}$ Determinanten

Aus dem Buch *Lineare Algebra* von Gerd Fischer, 18. Auflage 2014, Springer Spektrum:

> (Seite 174) „In den vorhergehenden Kapiteln wurde laufend mit Linearkombinationen gerechnet, das gilt als der „triviale" Teil der linearen Algebra. Nun steigen wir eine Stufe höher zur Determinante, das ist eine Zahl, die man einer quadratischen Matrix zuordnet. Leibniz gab schon um 1690 eine Formel zur Berechnung dieser Zahl an. Weierstraß benuzte in seinen Vorlesungen eine andere Methode: Er führte die Determinante mit axiomatisch angegebenen Eigenschaften ein. Dadurch kann man die chronischen Vorzeichenprobleme erst einmal im Hintergrund halten ...."
>
> (Seite 193) „Für den Existenzbeweis definieren wir nun die Determinante durch die Formel von Leibniz, und es sind die Axiome von Weierstraß nachzuprüfen. Danach herrscht wieder Frieden zwischen den beiden alten Herren."

$\boxed{\textbf{7}}$ Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die symmetrische Gruppe S_n hat $n!$ Elemente und ist für $n \geq 3$ nicht kommutativ.

$\boxed{\textbf{8}}$ Wir notieren eine Permutation $\sigma \in S_n$ gelegentlich in der Form $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ und daher für die Verknüpfung mit $\rho \in S_n$ auch

$$\sigma \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \rho(1) & \cdots & \rho(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(\rho(1)) & \cdots & \sigma(\rho(n)) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\sigma \circ \rho$, ρ^2, $\operatorname{sign}(\sigma)$ und $\operatorname{sign}(\rho)$ für $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und stellen Sie σ und ρ als Produkt von Transpositionen dar.

$\boxed{\textbf{9}}$ (Alternierende Gruppe) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ ist eine normale Untergruppe von S_n mit $n!/2$ Elementen. [Wiederhole: Eine Untergruppe H einer Gruppe G ist *normal*, falls für alle $g \in G$ gilt $gH = Hg$; d.h. die Linksnebenklassen stimmen mit den Rechtsnebenklassen überein.]

$\boxed{\textbf{10}}$ Zeigen Sie, dass für $\sigma \in S_n$ gilt: $\operatorname{sign}(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

[Also ausgehend von der Definition in der VO in der Form $\operatorname{sign}(\sigma) := \prod_{i<j} \operatorname{sgn}(\sigma(j) - \sigma(i))$.]

$\boxed{\textbf{11}}$ Durch Rückgriff auf anfangs im WS 18 behandelte spezifische Eigenschaften von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ begründen Sie:

(a) Das Vektorprodukt definiert eine alternierende bilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(b) Das Spatprodukt definiert eine Determinantenform auf $\mathbb{R}^3$. Entwickeln Sie eine konkrete Formel für die entsprechende Abbildung $M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. („Entdecken" Sie also die Formel von Sarrus.)

$\boxed{\textbf{12}}$ Es seien V und W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\Phi\colon V \times \cdots \times V \to W$ eine alternierende k-lineare Abbildung. Beweisen Sie direkt aus der Definition, dass für linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ stets $\Phi(v_1, \ldots, v_k) = 0$ gelten muss.

$\boxed{\textbf{13}}$ Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\beta\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, gegeben durch $\beta(u, v) := u^T \cdot (A \cdot v)$, ist bilinear. Unter welchen Bedingungen an A ist β alternierend bzw. symmetrisch?

(b) Für $u, v \in \mathbb{K}^n$ ist $(A \cdot u) \cdot v^T \in M_n(\mathbb{K})$ und die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to M_n(\mathbb{K})$, gegeben durch $\Phi(u, v) := (A \cdot u) \cdot v^T$, ist bilinear.

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Blatt 3

14 Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{K})$ und für $\lambda \in \mathbb{K}$ jeweils $p(\lambda) := \det(A - \lambda 1_2) = \det \left(\begin{smallmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie die beiden Identitäten

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det(A) \quad \text{und} \quad A^2 - \operatorname{tr}(A)\,A + \det(A)\,1_2 = 0.$$

15 Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ auf drei Arten, nämlich mittels Gauß-Verfahren, Regel von Sarrus und Laplace-Entwicklung.

16 Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 0 & 1 & 74 & 0 & 91 \\ 0 & 0 & 3 & 97 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 0 & 1 & 74 & 0 & 91 \\ 0 & 0 & 3 & 97 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 99 & 9 & 18 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

18 Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ [vgl. Aufgabe 96 aus WS18] nach der Cramerschen Regel.

19 Bereiten Sie einen Beweis für die in der Vorlesung erwähnte Vandermonde-Determinante vor. In welchem Fall ist die entsprechende Matrix invertierbar?

20 Zeigen Sie mit Hilfe der Vandermonde-Determinante, dass im reellen Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die (überabzählbare) Menge $B := \{e_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig ist, wobei $e_\lambda(t) := e^{\lambda t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. [Hinweis: Nachdem Sie einen geeigneten Ansatz mit einer endlichen Linearkombination gemacht haben, werten Sie diese sowie entsprechend viele Ableitungen davon bei $t = 0$ aus.]

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 4

Zu Kapitel $\boxed{\text{G}}$ Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

In den Aufgaben $\boxed{21}$-$\boxed{25}$ ist für die angegebenen reellen Matrizen jeweils zu untersuchen, ob sie diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind und in diesem Fall die genaue Diagonalgestalt bezogen auf eine konkrete geordnete Basis aus Eigenvektoren[1] anzugeben.[2] Andernfalls geben Sie so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie möglich an.

21 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **22** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **23** $C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

24 $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **25** $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

26 Zeigen Sie, dass für einen Eigenwert einer quadratischen Matrix die geometrische Vielfachheit stets kleiner oder höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit ist.
[Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis des Eigenraumes zu einer des gesamten Vektorraumes und betrachten Sie die entsprechende Matrixdarstellung bzw. das zugehörige charakteristische Polynom.]

27 Von den Matrizen $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ seien die charakteristischen Polynome bekannt, nämlich

$$\chi_A(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x \quad \text{und} \quad \chi_B(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6.$$

Wieso können wir daraus schließen, dass B bijektiv und $\dim \ker(A \cdot B) = 1$ ist?

28 Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi \in L(V)$ invertierbar. Zeigen Sie:
(a) 0 ist kein Eigenwert von Φ.
(b) Für $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt: λ ist Eigenwert von $\Phi \iff \frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von Φ^{-1}.

29 Geben Sie einen alternativen Beweis für die Aussage in $\boxed{20}$, indem Sie eine geeignete lineare Abbildung $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ angeben, bezüglich der jede dort mit e_λ bezeichnete Funktion als Eigenvektor, jeweils zum Eigenwert λ, auftritt.

---

[1] Erinnerung, um Ihnen unnötige Rechenarbeit zu ersparen: Die Wechselmatrix von einer geordneten Eigenvektorbasis zur Standardbasis haben wir in der VO mit Q^{-1} bezeichnet und die Diagonalisierung von A ergab sich dann durch $D = QAQ^{-1}$; aber wir können D bereits angeben (speziell eben die Anordnung der Eigenwerte entlang der Diagonalen), sobald Q^{-1} bekannt ist (speziell die gewählte Reihenfolge der Eigenvektoren) und müssen deren Inverse Q nicht als Fleißaufgabe auch noch berechnen.

[2] Wie Sie wahrscheinlich aus der UE „Hilfsmittel aus der EDV" wissen, können Sie die Korrektheit Ihrer umfangreichen Berechnungen eventuell mal mit `Mathematica` überprüfen – da gibt es insbesondere auch den Befehl `Eigensystem[ ]` ...

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 5

$\boxed{\textbf{30}}$ Zeigen bzw. entscheiden Sie folgende Aussagen jeweils für Matrizen aus $M_n(\mathbb{K})$:
(a) Wenn $A \sim B$ (d.h. A und B sind ähnlich), dann haben A und B dieselben Eigenwerte, dieselbe Determinante, dieselbe Spur ... einfacher: dasselbe charakteristische Polynom.
(b) Zwei Diagonalmatrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie durch Basiswechsel in Form einer Permutation der Standardbasis ineinander übergeführt werden können.
(c) Das charakteristische Polynom einer oberen Dreicksmatrix zerfällt in Linearfaktoren. Muss so eine Matrix auch diagonalisierbar sein?

$\boxed{\textbf{31}}$ Zeigen bzw. entscheiden Sie folgende Aussagen für Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$:
(a) Seien A und B diagonalisierbar. Wenn $AB \neq BA$ gilt, dann kann es keine Basis von $\mathbb{K}^n$ geben, die aus Eigenvektoren sowohl für A als auch für B besteht.
[Bemerkung: Im Falle $AB = BA$ ist die sogenannte simultane Diagonalisierung aber möglich.]
(b) Kann es in (a) vorkommen, dass AB diagonalisierbar ist, während BA es nicht ist?[1]
(c) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ ist (reell) diagonalisierbar genau dann, wenn $bc > 0$ oder $b = c = 0$.

$\boxed{\textbf{32}}$ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\Phi \in L(V)$. Zeigen Sie: ${}_B[\Phi]_B$ ist genau dann eine obere Dreicksmatrix, wenn für jedes $k = 1, \dots, n$ der Teilraum $V_k := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ invariant unter Φ ist, d.h. $\Phi(V_k) \subseteq V_k$.

Für die Aufgaben $\boxed{33}$-$\boxed{35}$ nehmen wir an, dass das charakteristische Polynom χ_A von $A \in M_n(\mathbb{K})$ komplett in Linearfaktoren zerfällt (was z.B. im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ immer zutrifft).
[Gemäß eines Resultats der VO muss das charakteristische Polynom einer diagonalisierbaren Matrix notwendig in Linearfaktoren zerfallen, aber die Umkehrung davon gilt eben nicht.]
Wir nehmen also an, dass mit den (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ von A die folgende Zerlegung gilt: $\chi_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$.

$\boxed{\textbf{33}}$ Zeigen Sie: $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ und $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

$\boxed{\textbf{34}}$ Sei $n \geq 2$. Wir wählen einen Eigenvektor v_1 zu λ_1 und ergänzen durch $B' := \{u_2, \dots, u_n\}$ zu einer Basis B von $\mathbb{K}^n$. Weiters setzen wir $V_1 := \operatorname{span}\{v_1\}$ und $U := \operatorname{span} B'$, sodass $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus U$. Für $j = 2, \dots, n$ sei jeweils $Au_j = c_{1j}\, v_1 + u'_j$, wobei $u'_j \in U$ und $c_{1j} \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt sind. Schließlich seien die linearen Abbildungen $L\colon U \to U$ und $\alpha\colon U \to \mathbb{K}$ durch die Werte $L(u_j) := u'_j$ bzw. $\alpha(u_j) := c_{1j}$ auf der Basis B' festgelegt. Zeigen Sie zunächst die Relation $Au = \alpha(u)v_1 + L(u)$ für alle $u \in U$. Weiters schließen Sie durch Betrachtung der Matrix ${}_B[A]_B$, dass $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)\chi_L(x)$ gilt und daher das charakteristische Polynom von L ebenfalls in Linearfaktoren zerfällt.

$\boxed{\textbf{35}}$ Beweisen Sie mit der Konstruktion aus $\boxed{34}$ und mit Hilfe von $\boxed{32}$ durch Induktion nach n, dass A ähnlich zu einer oberen Dreicksmatrix ist. [Hinweis: Falls $w_1, \dots, w_{n-1}$ eine Basis von U ist, bezüglich der L obere Dreiecksform annimmt, dann betrachte V_1 und $V_k := \operatorname{span}\{v_1, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ für $k = 2, \dots, n$.]

Bemerkung: Wir haben hier den sogenannten *Trigonalisierungssatz*[2] bewiesen: Eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. Insbesondere ist damit jede komplexe quadratische Matrix ähnlich zu einer solchen. (Dies wird im 3. Semester mit der Jordan-Normalform noch vertieft.)

[1] Es schadet fast nie, zunächst mit 2×2-Matrizen zu „experimentieren“ ...
[2] Im aktuellen Curriculum findet sich dazu der Begriff „Triangulierung“.

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 6

Zu Kapitel $\boxed{\text{H}}$ Euklidische und unitäre Vektorräume

$\boxed{\textbf{36}}$ Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$. Zeigen Sie für alle $v, w \in V$
(a) die Parallelogrammregel $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$,
(b) die Polarisierungsformeln, d.h. im euklidischen Fall $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$ und im unitären Fall $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|i^k v + w\|^2$.
(c) Begründen Sie, warum die Norm $\|(x_1, x_2)\|_\infty := \max(|x_1|, |x_2|)$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht von einem Skalarprodukt stammen kann.

$\boxed{\textbf{37}}$ Für alle f, g aus dem reellen Vektorraum $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

Zeigen Sie: (a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.
(b) Gerade und ungerade Funktionen sind stets orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
(c) 1, cos, sin sind paarweise orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und daher auch linear unabhängig.

$\boxed{\textbf{38}}$ Es sei $\alpha \in [0, 2\pi[$ und $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sowie $S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass $D(\alpha) \in SO(2)$ und $S(\alpha) \in O(2) \setminus SO(2)$ gilt. Beschreiben Sie die Wirkung der entsprechenden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ elementargeometrisch (Skizze genügt). Sind diese Matrizen diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$?

$\boxed{\textbf{39}}$ Im euklidischen Vektorraum aus Aufgabe **??** betrachten wir den Teilraum V der Polynomfunktionen vom Grad höchstens 2. Dieser hat als Basis die Funktionen $b_0, b_1, b_2 \in V$, wobei $b_j(x) := x^j$ $(j = 0, 1, 2)$. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren an, um daraus eine Orthonormalbasis für V zu gewinnen.

$\boxed{\textbf{40}}$ Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum sowie U ein Teilraum von V, $v \in V \setminus U$ und P bezeichne die Orthogonalprojektion auf U. Zeigen Sie, dass für alle $u \in U$ die Ungleichung $\|v - u\| \geq \|v - Pv\|$ gilt und Gleichheit genau dann eintritt, wenn $u = Pv$ ist. (Somit ist Pv ist die Bestapproximation aus U an v.)

$\boxed{\textbf{41}}$ In $\mathbb{C}^4$ mit dem Standardskalarprodukt sei $U := \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
Bestimmen Sie Orthonormalbasen b_1, b_2 von U und b_3, b_4 von $U^\perp$.
Wie kann mittels b_1, b_2 die Orthogonalprojektion eines beliebigen Vektors $z \in \mathbb{C}^4$ auf U berechnet werden?

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 7

$\boxed{42}$ (a) Unter welchen Bedingungen an $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ist die Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{C})$ unitär?
(b) Ist jede Matrix in $U(n)$ diagonalisierbar? Ist sie unitär diagonalisierbar? Was wissen wir über ihre Eigenwerte?
(c) Zeigen Sie, dass eine komplexe 2×2-Matrix genau dann zu $SU(2)$ gehört, wenn sie von der Form $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ist.

$\boxed{43}$ Zeigen Sie, dass im euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalprojektion gegeben ist. Was ist der Rang von P? Bestimmen Sie Orthonormalbasen von $\operatorname{im} P$ und $\ker P$ und daraus eine (geordnete) Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$. Wie sieht denn die Matrix von P bzgl. B aus?

Sind die Matrizen in den Aufgaben $\boxed{44}$-$\boxed{45}$ normal oder selbstadjungiert als Abbildungen im unitären Standardraum $\mathbb{C}^3$? Wenn ja, führen Sie die unitäre Diagonalisierung durch.

$\boxed{44}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{45}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 2i & -3i & 0 \\ 3i & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{46}$ Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $A \in L(V)$ normal. Zeigen Sie: A ist selbstadjungiert genau dann, wenn alle Eigenwerte von A reell sind.

$\boxed{47}$ Eine lineare Abbilung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ zwischen den euklidischen Standardräumen sei durch die Matrix $A \in M_{n \times d}(\mathbb{R})$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^T$ gilt.
Was lernen wir daraus für die Charakterisierung jener $b \in \mathbb{R}^n$, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^d$ besitzt?

In den Aufgaben $\boxed{48}$-$\boxed{49}$ sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $A \in L(V)$. Zeigen Sie:

$\boxed{48}$ (a) Falls $\langle v, Av \rangle = 0$ für alle $v \in V$ gilt, dann muss $A = 0$ sein. [Hinweis: Zerlegen Sie $\langle w, Av \rangle$ für beliebige $v, w \in V$ geeignet mittels Kombinationen von $w \pm v$ und $w \pm iv$.]
(b) Bereits im Falle $V = \mathbb{C}^2$ gibt es $A \neq 0$ mit 0 als einzigem Eigenwert.
(c) Die Aussage in (a) gilt im Falle euklidischer Vektorräume nicht. (Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$)

$\boxed{49}$ A ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle v, Av \rangle \in \mathbb{R}$ gilt für jedes $v \in V$.

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 8

$\boxed{\textbf{50}}$ In $M_2(\mathbb{C})$ betrachten wir den reellen Teilraum $H(2)$ aller Hermiteschen 2×2-Matrizen sowie die *Pauli-Matrizen* $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right), \sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass $B := (1_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine (geordnete) Basis von $H(2)$ ist und geben Sie die Inverse $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to H(2)$ des entsprechenden Koordinatenisomorphismus konkret an. Berechnen Sie $\det \Phi(t, x, y, z)$.

$\boxed{\textbf{51}}$ Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A \in L(V)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass für $p \in \mathbb{R}[x]$ stets auch $p(A)$ selbstadjungiert ist und $\operatorname{spec}(p(A)) = p(\operatorname{spec}(A))$ gilt.

$\boxed{\textbf{52}}$ Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $a \in V \setminus \{0\}$. Begründen Sie zunächst, dass durch $H := \{a\}^\perp$ eine *Hyperebene* in V gegeben ist, d.h. H ist ein Teilraum der Dimension $n-1$. Weiters sei $S \in L(V)$ definiert durch

$$Sx = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a \qquad (x \in V).$$

Zeigen Sie: S ist orthogonal, selbstadjungiert und selbstinvers; weiters gilt $Sa = -a$ und $Sh = h$ für alle $h \in H$. Somit ergibt die geometrische Interpretation von S eine Spiegelung an der Hyperebene H. (Skizze!)

Führen Sie in den Aufgaben $\boxed{53}$-$\boxed{54}$ jeweils die orthogonale Diagonalisierung der gegebenen symmetrischen Matrix durch:

$\boxed{\textbf{53}}$ $A = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ [mit Eigenwerten 27, -15,9], $\boxed{\textbf{54}}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{55}}$ Im euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ sei a ein Einheitsvektor und $R \in L(\mathbb{R}^3)$ für fixes $\alpha \in [0, \pi]$ gegeben durch

$$Rx = \cos(\alpha)\, x + \big(1 - \cos(\alpha)\big)\langle a, x\rangle\, a + \sin(\alpha)\, a \times x \qquad (x \in \mathbb{R}^3).$$

Zeigen Sie: R ist orthogonal[1] und $Ra = a$; weiters nach Ergänzung von a durch normiertes $v_1 \in \{a\}^\perp$ sowie $v_2 := a \times v_1 \in \{a\}^\perp$ zu einer Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ auch $\det R = \det{}_B[R]_B = 1$ und $\operatorname{tr}(R) = \operatorname{tr}_B[R]_B = 1 + 2\cos(\alpha)$. Diskutieren Sie die geometrische Interpretation von R als Drehung im Raum um den Winkel α mit Drehachse a.

$\boxed{\textbf{56}}$ Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ normal ist. Wenden Sie dann den reellen Spektralsatz an, d.h. finden Sie eine orthogonale Matrix O, sodass OAO^T in Blöcke zerfällt, die reell diagonal sind oder von der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

[1] Empfohlen sei dazu ein Rückblick auf Resultate zum Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ aus WS18, speziell die Graßmann-Identität [aus der VO bzw. Waldmann, Band 1, Prop.1.15] und daraus abgeleitet eine Formel für $\langle a \times b, c \times d\rangle$ [Aufgabe im UE-Blatt 1 vom WS18].

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 9

Nun zu Abschnitt $\boxed{\text{H.6}}$ über Positivität und Polarzerlegung: Aus dem Klassiker *Finite dimensional vector spaces* von Paul R. Halmos, Princeton University Press 1948:

> „The three most important subsets of the complex number plane are the real numbers, the positive real numbers, and the numbers of absolute value one. We shall now proceed systematically to use our heuristic analogy of transformations with complex numbers and try to discover the analogs among transformations of these well known numerical concepts.“

$\boxed{\mathbf{57}}$ Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $\det A > 0$. [Hinweis: Für $q(x,y) := (x,y)A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ gilt $aq(x,y) = (ax+by)^2 + (\det A)y^2$.]

$\boxed{\mathbf{58}}$ Zeigen Sie mit Hilfe des Spektralsatzes, dass eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte größer als 0 sind.

$\boxed{\mathbf{59}}$ Für invertierbare quadratische Matrizen hatten wir in der VO eine vereinfachte Polarzerlegung besprochen. Was ergibt sich bei Anwendung auf folgende Matrizen jeweils für die Isometrie und den Absolutbetrag?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in [0, 2\pi[.$$

$\boxed{\mathbf{60}}$ In der VO wurde die Polarzerlegung als Schritt 2) im Rahmen der Singulärwertzerlegung diskutiert (bzw. entspricht dies auch gerade Satz 7.129 im Buch von Waldmann, genauer dem Beweisteil zur Existenz). Wiederholen Sie diese Konstruktionsschritte im Detail.

$\boxed{\mathbf{61}}$ Sei $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ wie üblich aufgefasst als lineare Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, kann die Größe $v_A(x) := \|Ax\|/\|x\|$ als Längenverzerrungsverhältnis in Richtung x verstanden werden. Zeigen Sie:
(a) Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $v_A(\lambda x) = v_A(x)$; weiters $v_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \ker A$.
(b) Sei s_0 der größte singuläre Wert von A (daher s_0^2 gerade der größte Eigenwert von A^*A), dann ist $v_A(u) = s_0$ für jeden Eigenvektor u von A^*A zum Eigenwert s_0^2.
(c) Für alle $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ gilt $v_A(x) \leq s_0$. [Zeige $\|Ax\|^2 = \langle x, A^*Ax\rangle \leq s_0^2\|x\|^2$ mittels Spektralsatz für A^*A.]
Bemerkung: $\|A\| := \sup\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0\}$ ist gerade die *Operatornorm* von A.

Aufgaben[1] $\boxed{62}$-$\boxed{63}$ beziehen sich jeweils auf die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 6 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{62}}$ Berechnen Sie die singulären Werte $s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq 0$ von A.

$\boxed{\mathbf{63}}$ Geben Sie die Singulärwertzerlegung für A an, d.h. bestimmen Sie orthogonale 3×3-Matrizen Q, T, sodass $QAT = \operatorname{diag}(s_0, s_1, s_2)$ wird. (Wegen $m = n = 3$ erhalten wir hier eine Diagonalmatrix und zudem haben Q und T dieselbe Größe.)

[1] Stützen Sie sich hier bei Zwischenrechnungen mit großen Zahlen gerne auf Computer(algebra). Bis auf einzelne Faktoren $\sqrt{2}$ geht es sich eh sehr schön aus, mit rationalen Ausdrücken weiterzurechnen.

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 10

Zu Kapitel $\boxed{\text{I}}$ Geometrie mit reellen quadratischen Formen

— dieses UE-Blatt speziell als Begleitung zum Abschnitt I.1 „Zu Fuß durch den $\mathbb{R}^2$“.

Für die Aufgaben $\boxed{64}$ bis $\boxed{68}$ ziehen wir Kapitel 5, konkreter Abschnitt 5.1, aus dem Buch *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie: Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium*, Verlag Vieweg+Teubner 2011, von Gerd Fischer heran. (Für Studierende online über `u:search` bzw. `u:access` in der Universitätsbibliothek verfügbar.)

Aufgaben $\boxed{64}$-$\boxed{65}$ stützen sich auf Unterabschnitt 5.1.1 im Lernbuch von Gerd Fischer:

$\boxed{\mathbf{64}}$ Referieren Sie über die analytische Darstellung eines typischen fixen Kreiskegels im $\mathbb{R}^3$ und Gleichungen für seine Schnittmengen mit Sezialfällen von Ebenen senkrecht zur Achse, parallel zur Achse und parallel zu einer Tangentialebene.

$\boxed{\mathbf{65}}$ Referieren Sie über die Gleichungen der Schnittmengen eines Kreiskegels mit Ebenen in beliebigen Neigungswinkeln zur Kegelachse.

In diesen drei Aufgaben stützen Sie sich auf Unterabschnitt 5.1.2 im Lernbuch von Gerd Fischer, um einige geometrische Eigenschaften der Kegelschnitte an Hand von Standardformen zu diskutieren (bzw. zu wiederholen): $\boxed{\mathbf{66}}$ Ellipse, $\boxed{\mathbf{67}}$ Hyperbel, $\boxed{\mathbf{68}}$ Parabel.

In den Aufgaben $\boxed{69}$-$\boxed{71}$ ist jeweils ein Kegelschnitt als Nullstellenmenge einer quadratischen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie den Typ des Kegelschnittes und geben Sie die nötigen Daten für eine Transformation auf sogenannte Hauptlage an, d.h. für die Hauptachsentransformation der rein quadratischen Anteile sowie geeignete Translationsvektoren, um entweder Konstanten oder Terme ersten Grades „wegzubekommen“:

$\boxed{\mathbf{69}}$ $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_1 + 2x_2 + 5,$

$\boxed{\mathbf{70}}$ $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2\sqrt{6}\,x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 - 1,$

$\boxed{\mathbf{71}}$ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2.$

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

In den Aufgaben dieses Übungsblattes spielen wir einige der etwas abstrakteren Aspekte aus den VO-Abschnitten über reelle symmetrische Bilinearformen, quadratische Funktionen und Quadriken nun speziell für $V = \mathbb{R}^n$ (mit dem Standardskalarprodukt) durch. Es sei hierfür stets $h\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, gegeben durch eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mittels $h(x, y) = x^T \cdot A \cdot y$, und q die zugeordnete quadratische Form, also $q(x) = h(x, x) = x^T \cdot A \cdot x$. Das lineare Funktional $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sei gegeben durch einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ in der Form $\varphi(x) = \langle u, x\rangle = u^T \cdot x$ und c bezeichne eine beliebige reelle Konstante. Schließlich ist die quadratische Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dann konkret gegeben durch

$$f(x) = q(x) + 2\varphi(x) + c = h(x, x) + 2\langle u, x\rangle + c = x^T \cdot A \cdot x + 2u^T \cdot x + c.$$

72 Rechnen Sie nach, dass sich ein Basiswechsel in $\mathbb{R}^n$ mittels $S \in GL_n(\mathbb{R})$, also gemäß $x = Sx'$ und $y = Sy'$, auf h so auswirkt, dass ausgedrückt in den Koordinatenvektoren x' und y' eine Bilinearform mit Darstellungsmatrix $S^T AS$ entsteht. Was ergibt sich speziell, falls S eine orthogonale Matrix aus Eigenvektoren zur Matrix A ist? Was ergibt sich andererseits, falls A bereits in Diagonalform vorliegt und auch S eine Diagonalmatrix ist?

73 Bestimmen Sie die Signatur von h, falls $n = 3$ und A eine der folgenden Matrizen ist:
(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. In welchem dieser Fälle ist h nicht-ausgeartet?

74 Zeigen Sie für die Abbildung $\check{h}\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$, wobei für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das lineare Funktional $\check{h}(x)$ durch $y \mapsto h(x, y)$ gegeben ist, folgende Eigenschaften:
(a) $\check{h}(x)$ ist gegeben durch (Skalarproduktwirkung mit dem Vektor) Ax,
(b) $\ker \check{h} = \ker A$,
(c) $\varphi \in \operatorname{im} \check{h} \Leftrightarrow u \in \operatorname{im} A$.

75 Benützen Sie die vorige Aufgabe, um in unserer konkreten Situation nachzuvollziehen, dass jeweils durch Translation $T_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + x_0$, mit einem geeigneten Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die folgende Situation erreicht werden kann:
(a) Im Falle $\varphi \in \operatorname{im} \check{h}$ für ein gewisses $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ die Form $f \circ T_{x_0} = q + \tilde{c}$.
(b) Im sogenannten parabolischen Fall $\varphi \notin \operatorname{im} \check{h}$ die Form $f \circ T_{x_0} = q + 2\varphi$.

In den Aufgaben 76-77 ist durch Hauptachentransformation die prinzipielle Gestalt der Quadrik $Q(f, \lambda) = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \lambda\}$ zu bestimmen[1]. (In 76 gibt es einen „kritischen“ Wert von λ, wo sich etwas ändert, aber in 77 nicht — warum eigentlich nicht?)

76 $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + 14x_1 + 10x_2 - 1$

77 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 128x_1 - 46x_2 - 430$

[1] Falls Sie Zeit und Laune haben, könnten Sie hier zur Illustration auch in Mathematica mit den Befehlen `ImplicitRegion` und `RegionPlot` experimentieren.

UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 12

Wieder einmal „quer durch den Gemüsegarten“, also Wiederholung zu allen VO-Kapiteln des Sommersemesters:

78 Zeigen Sie: Wenn $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar ist, dann gilt für die charakteristischen Polynome und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, die Relation $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)}\chi_A(\frac{1}{\lambda})$. Was passiert mit dieser Gleichung im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ für $\lambda \to 0$? [Hinweis: Wir wissen (woher?), dass $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + O(|x|^{n-1})$ für $x \to \infty$ ist; daher bleibt $(-\lambda)^n \chi_A(\frac{1}{\lambda})$ für $\lambda \to 0$ kontrollierbar.]

79 Zeigen Sie: Für $A_n = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $\det(A_n) = (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}$.

80 Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar über $\mathbb{R}$? Über $\mathbb{Q}$?

Falls ja, geben Sie eine Basis aus Eigenvektoren und die zugehörige Diagonalmatrix an.

81 Wenden Sie auf die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an.

82 (a) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar über $\mathbb{R}$? Über $\mathbb{C}$?

(b) Der Shift-Operator S auf dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Zahlenfolgen ist gegeben durch $S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$. Zeigen Sie, dass S keinen Eigenwert hat.

83 Was sind die Eigenvektoren und Eigenwerte zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$?

84 Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $A \in L(V)$ und $v, w \in V \setminus \{0\}$, sodass $Av = 3w$ und $Aw = 3v$ gilt. Zeigen Sie, dass -3 oder 3 ein Eigenwert zu A sein muss.

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Blatt 13

Weiter „quer durch den Gemüsegarten“ ...

85 Sind die folgenden Matrizen unitär bzw. orthogonal?

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } G = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

86 Geben Sie die Polarzerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ an. [Überlegen Sie zuerst, dass A invertierbar ist, also die vereinfachte Konstruktion möglich ist. Zumindest $|A|$ sollten Sie komplett von Hand ausrechnen, exakt mit Wurzelausdrücken; für den unitären Faktor U rechnen Sie ruhig z.B. mit MATHEMATICA exakt weiter; gelegentlich `Simplify` verwenden und die Ergebnisse auch überprüfen, also z.B., ob Ihre errechneten U und $|A|$ auch tatsächlich $U|A| = A$ erfüllen.]

87 Es sei $U := \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ im unitären Standardraum $\mathbb{C}^4$.
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

88 Führen Sie jeweils die orthogonale Diagonalisierung für die folgenden symmetrischen Matrizen durch: $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

89 Welche Kegelschnitte sind jeweils durch die folgenden Gleichungen im $\mathbb{R}^2$ gegeben? [Beachten Sie, dass hier nicht von jedem einzelnen Schritt der Hauptachsentransformation die vollen Details nötig sind, um die Entscheidung treffen zu können.]
(a) $x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 - 1 = 0$,
(b) $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0$,
(c) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_2 = 0$.

Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$? Sind sie orthogonal oder unitär diagonalisierbar?

90 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ **91** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

Zum Abschluss dieses Übungssemesters noch aus dem Vorwort des Buches *Lineare Algebra und analytische Geometrie* von Theodor Bröcker, Birkäuser Verlag, 2. Auflage 2004:

> „Die Grundbegriffe der Linearen Algebra, wie man sie zur Vorbereitung einer Vorlesung über Algebra braucht, lassen sich auf einem Dutzend Seiten vollständig darstellen. Solche Kürze wird vielleicht gerade Algebraikern vom Fach besonders einleuchten. Aber auf der anderen Seite stehen Bedürfnisse und Interessen aus der Analysis, Geometrie und Physik, die weit über das hinausgehen, was man in einem zweisemestrigen Kurs bewältigen kann.
>
> ...
>
> Die Motti, die ich, ohne die Autoren zu verraten, mir zum Vergnügen und manchmal gleichsam als Rätsel, den Kapiteln vorangestellt habe, bitte ich mir wohlwollend durchgehen zu lassen, und die Aufgaben will ich besonders empfehlen.“

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!