Zur Verfügung gestellt von:
Kerstin Hummer
VO Einführung in die physik. Rechenmethoden
WiSe 2019/20, LV.-Nr.: 260400
Fakultät für Physik, Universität Wien
Danke!

Beispielhafte Modulprüfung STEOP2 Modul

Formelsammlung

$$\sin^2(ax) = \frac{1-\cos(2ax)}{2}$$

$$\cos^2(ax) = \frac{1+\cos(2ax)}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\mathrm{cotan}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + C$$

1. Velangt ist eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

Lösen Sie dazu folgende Aufgaben:

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion und ihre Grenzwerte an den Grenzen des Definitionsbereichs und den Asymptoten an. (**1 Punkt**)

b) Geben Sie die Nullstellen der Funktion an. (**1 Punkt**)

c) Berechnen Sie die erste Ableitung und ihre Nullstellen und geben Sie das monotone/nicht-monotone Verhalten der Funktion an. (**2 Punkte**)

d) Berechnen Sie die zweite Ableitung und ihre Nullstellen und geben Sie alle Wendepunkte der Funktion an. (**2 Punkte**)

e) Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an, indem Sie alle Ihre bisherigen Überlegungen und Ergebnisse zusammenführen. (**1 Punkt**)

2. Gegeben seien drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Überprüfen Sie, ob diese drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ koplanar sind und ob es sich um ein Links- oder Rechtssystem handelt. **(3 Punkte)**

b) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{a}_0$ und $\mathbf{c}_0$. **(2 Punkte)**

3. Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = -2i$ und $z_2 = 1 + i$.

a) Stellen Sie z_1 und z_2 in der Gauß'schen Zahlenebene dar. **(1 Punkt)**

b) Geben Sie z_1 und z_2 in der Polarkoordinatendarstellung an. **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie $z_3 = z_1 z_2$ und stellen Sie z_3 ebenfalls in der Gauß'schen Zahlenebene dar. **(1 Punkt)**

4. Gegeben sei eine Oberfläche in $\mathbb{R}^3$ durch folgende Gleichung:

$$z(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Transformieren Sie diese Gleichung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), wobei ϑ den Winkel zur z-Achse bezeichnet und φ den Winkel in der xy-Ebene. **(4 Punkte)**

b) Auf dieser Oberfäche befindet sich ein Teilchen mit $\vartheta = \pi/3$ und $\varphi = \pi/6$. Berechnen Sie den Abstand dieses Teilchens vom Ursprung. **(1 Punkt)**

5. a) Sei $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} r^2$ wobei $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zeigen Sie, dass der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ der Gradient von $\phi(\vec{r})$ ist. (**2 Punkte**)

b) Sei $\phi(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$, wobei $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ein von $\vec{r}$ unabhängiger konstanter Vektor ist. Zeigen Sie, dass das Gradientenfeld von ϕ quellenfrei ist. (**2 Punkte**)

6. Gegeben ist das dreidimensionales Vektorfeld in kartesischen Koordinaten

$$\vec{F}(x,y,z) = 2xy\hat{e_x} + (x^2+z^2)\hat{e_y} + 2zy\hat{e_z}$$

   a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$ entlang des Weges $\vec{r}(t) = (1-t, 1+t, 3t)^\top$ von $\vec{r_0} = (1,1,0)$ bis $\vec{r_1} = (0,2,3)$ (**3 Punkte**)
   b) Zeigen Sie, dass $\vec{F}(x,y,z)$ ein konservatives Feld ist (**1 Punkt**) und berechnen Sie das Potential $\Phi(x,y,z)$ (**2 Punkte**).
   c) **Bonusaufgabe (2 Punkte):** Überprüfen Sie explizit unter Verwendung des Potentials $\Phi(x,y,z)$, ob das Kurvenintegral über das konservative Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z)$ wegunabhängig ist.

7. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{c\sin(x^x)}{x^2+1},$$

   wobei $x \in \mathbb{R}$ und $c = const.$

   a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion. (**4 Punkte**)
   b) Geben Sie den Definitionsbereich der Ableitung an. Hinweis: Beachten Sie auch den Bereich der negativen Zahlen. (**2 Punkte**)

8. Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = \cos^3(t); \qquad y(t) = \sin^3(t)$$

   Berechnen Sie die Bogenlänge von $f(x)$ im Intervall $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. **(4 Punkte)**

9. Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale:

   a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln x\, dx$. **(3 Punkte)**
   b) $\displaystyle\int \operatorname{cotan}^2(2x)dx$. **(3 Punkte)**

10. Berechnen Sie die reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 - y(x)$$

   mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$. (**5 Punkte**)