Zur Verfügung gestellt von:
Kerstin Hummer
VO Einführung in die physik. Rechenmethoden
WiSe 2019/20, LV.-Nr.: 260400
Fakultät für Physik, Universität Wien
Danke!

Beispielhafte Modulprüfung STEOP2 Modul

Formelsammlung

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin^2(ax) = \frac{1 - \cos(2ax)}{2}$$

$$\cos^2(ax) = \frac{1 + \cos(2ax)}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\mathrm{cotan}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos(x) + C$$

1. a) Geben Sie die Basisvektoren $\vec{e_r} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}|}$, $\vec{e_\phi} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}|}$ und $\vec{e_\theta} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}|}$ des Kugelkoordinatensystems an. (**3 Punkte**)

   b) Überprüfen Sie, ob diese Basisvektoren ein Orthogonalsystem bilden. (**2 Punkte**)

2. a) Finden Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y' = 2x(y-1)^2$$

   mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$. (**3 Punkte**)

   b) Geben Sie den Definitionsbereich der gefundenen Lösung an und bestimmen Sie den Grenzwert für $x \to \pm\infty$? (**2 Punkte**)

3. Gegeben sei die folgende Funktion $y(t)$:

$$y(t) = \frac{N}{1 + b \cdot e^{-k \cdot t}}$$

   wobei $b = (N - y_0)/y_0$ und $y_0 \neq 0$ gilt. Dabei bezeichnet y_0 den Wert der Funktion bei $t = 0$. Gehen Sie davon aus, dass $N, b, k \in \mathbb{R}$ sowie $N, b, k > 0$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie alle Nullstellen der Funktion $y(t)$. (**1 Punkt**)

   b) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $y(t)$, sowie alle Extremstellen. (**1 Punkt**)

   c) Bestimmen Sie die Grenzwerte für $t \to \pm\infty$ sowie an etwaigen Asymptoten, und das Monotonieverhalten der Funktion $y(t)$. (**1 Punkt**)

   d) Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion $y(t)$, sowie alle Wendestellen. (**2 Punkte**)

   e) Zeigen Sie, dass die Funktion $y(t)$ die folgende (Differential-)Gleichung erfüllt (**1 Punkt**):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k\left(1 - \frac{y}{N}\right) y$$

   f) Die gegebene Funktion beschreibt das Wachstum einer Population. Unterliegt der Parameter b praktischen Beschränkungen im Kontext dieses Modells? Wenn ja, welchen? Begründen Sie Ihre Antwort. (**1 Punkt**)

4. a) Bestimmen Sie die Konstante β so, dass das Vektorfeld

$$\vec{a}(r) = \begin{pmatrix} \beta x_1 x_2 - x_3^3 \\ (-2+\beta)x_1^2 \\ (1-\beta)x_1 x_3^2 \end{pmatrix}$$

   wirbelfrei ist. (**3 Punkte**)

   b) Können sie ein β finden, für welches das Vektorfeld auch quellenfrei wird? (**2 Punkte**)

5. Verwenden Sie die Eulersche Formel, um zu zeigen, dass gilt:

$$\tan(3\varphi) = \frac{3 \cdot \tan(\varphi) - \tan^3(\varphi)}{1 - 3 \cdot \tan^2(\varphi)}$$

Dabei bietet es sich an, den Ausdruck der rechten Seite zunächst auf Terme mit sin() und cos() zurückzuführen und zu vereinfachen. (**4 Punkte**)

6. Berechnen Sie das unbestimmte Integral (**4 Punkte**)

$$\int \sin(2x)\sinh(x)dx.$$

7. a) Berechnen Sie die zu verrichtende Arbeit, um ein Partikel im Kraftfeld $\vec{F}(x,y)$ entlang dem oberen Teil der Ellipse $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ von $(-1,0)$ bis $(1,0)$ zu verschieben.

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3y^2 + 2 \\ 16x \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie dazu die Parameterform der Ellipse mit $x = \cos(t)$. (**6 Punkte**)

b) Bestimmen Sie b damit die Arbeit am geringsten ist. (**1 Punkt**)

8. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin x; \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des homogenen Problems. (**2 Punkte**)

b) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung des inhomogenen Problems mit dem Ansatz $y_p(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{2x}$.(**4 Punkte**)

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an. (**1 Punkt**)

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 3/5$. (**2 Punkte**)

9. **Bonusaufgabe (5 Punkte):** Eine Kanufahrerin befindet sich in einem Gewässer vor einem geradlinigen Ufer. Die Strecke zum nähesten Punkt A des Ufers beträgt 8 km. Die Kanufahrerin möchte zum kürzestmöglichen Zeitpunkt den Uferpunkt B erreichen, welcher eine Entfernung von 10 km zu A besitzt. Die Paddelgeschwindigkeit im Wasser beträgt 3 km/h, die Gehgeschwindigkeit an Land 5 km/h. Wie weit liegt der Uferpunkt P, den die Kanufahrerin anzielen muss, vom Punkt A entfernt, damit sie ihr Vorhaben erreicht?