Zur Verfügung gestellt von:
Kerstin Hummer
VO Einführung in die physik. Rechenmethoden
WiSe 2019/20, LV.-Nr.: 260400
Fakultät für Physik, Universität Wien
Danke!

260400 STEOP2 Modul:
Einführung in die Physikalischen Rechenmethoden

Übungsaufgaben

Funktionen

1. Bestimmen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen bei $x \mapsto \pm\infty$ und ermitteln Sie etwaige Unstetigkeitsstellen. Skizzieren Sie ein Bild der Funktion.

   a) $y = x + \frac{1}{x}$

   b) $y = \begin{cases} x^2, & \text{für } -\infty < x \leq 1 \\ \sin(\frac{\pi}{2} - 1 + x), & \text{für } x > 1 \end{cases}$

2. Verketten Sie die Funktionen $f \circ (g \circ h)$, wobei $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = \frac{\sin(x)}{\ln(x)}$ und $h(x) = e^x$.

3. Lösen Sie $x = 2\arcsin(\frac{y}{\sqrt{y^2+1}})$ nach y auf und zeichnen Sie ein Bild der Funktion.

4. Gegeben sei eine Funktion
$$f(x) = \frac{1}{ax^2} - \frac{b}{ax^4}.$$
Finden Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x^2$, um das Polynom 4. Grades in eines 2. Grades überzuführen.

5. Finden Sie die Parameterform
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$
eines Kreises mit Radius r, so dass der Kreis genau ein Mal durchlaufen wird, wenn sich t von 0 auf 1 ändert.

Vektoren

1. Bestimmen Sie, ob die 3 Vektoren paarweise aufeinander normal stehen. Falls ja, stellen Sie fest, ob sie ein Rechts- oder Linkssystem bilden.

   a)
   $$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   b)
   $$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sind die Punkte $\mathbf{A} = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{B} = (0, 0, 2)$, $\mathbf{C} = (-1, 2, 0)$ und $\mathbf{D} = (1, 2, z)$. Bestimmen Sie die z Koordinate des Punktes **D** derart, dass dieser Punkt in der von den Punkten **A**, **B**, **C** aufgespannten Ebene liegt.

3. Berechnen sie den Winkel, den die zwei Vektoren einschließen:

   a) $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Berechnen Sie die Komponente des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ in Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Gegeben sei eine Oberfläche in $\mathbb{R}^3$:
   $$z = x^2 + y^2$$

   a) Transformieren Sie diese Gleichung in Kugelkoordinaten unter nachvollziehbarer Angabe aller Zwischenschritte.

   b) Auf dieser Oberfäche befindet sich ein Teilchen mit $\theta = \pi/3$ und $\phi = \pi/6$. Berechnen Sie den Abstand dieses Teilchens vom Ursprung.

Differentiation

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 1$ über den Differenzenquotienten.
   a) Wie groß ist die erste Ableitung an der Stelle $x = 2$?
   b) Wie lautet der zugehörige Funktionswert?
   c) An welcher Stelle hat die Funktion Extremwerte?

2. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:
   a) $y(x) = \frac{3x^2+2x+7}{x^3-1}$
   b) $y(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\tan^2(x)}$
   c) $z(t) = \ln(\sqrt{1+t^2})$
   d) $x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$
   e) $y(x) = x^x$ *(Anleitung: $x = e^{ln(x)}$)*

3. Ein Körper bewegt sich entsprechend folgender Gleichung:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{für } 0 < t \leq 4 \\ 8 & \text{für } 4 < t \leq 7 \\ 8 + (t-7)^2 & \text{für } t > 7 \end{cases}$$

   a) Welche Geschwindigkeit hat er in den entsprechenden Zeitintervallen?
   b) Gibt es Zeitpunkte, zu denen die Geschwindigkeit nicht angegeben werden kann? Wenn ja, welche sind es?
   Hinweis: Eine Funktion ist an einer Stelle dann differenzierbar, wenn der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert des zugehörigen Differentialquotienten an dieser Stelle existieren und übereinstimmen, also wenn $\lim_{x\to x_{0^-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_{0^+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gilt.

4. Berechnen Sie $f''(x)$ von folgenden Funktionen:
   a) $f(x) = 3x^2 + \cos(x)$
   b) $f(x) = \ln(1-x)$
   c) $f(x) = \sqrt{2x+7}$

5. Bilden Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion.

$$f(x,y) = x^3y^2 + 2xe^{y^2} + 5y - 9$$

   Vergleichen Sie die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung.

Integration

1. Berechnen Sie mittels Substitution:
   a) $\int \frac{\sqrt{\sin(x)}}{(1-\sin^2(x))} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$
   b) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$
   c) $\int x \operatorname{cotan}(x^2)\,\mathrm{d}x$
   d) $\int a^x\,\mathrm{d}x$ *Anleitung:* formen Sie a^x auf $e^{\ln(a)\cdot x}$ um.
2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:
   a) $\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
   b) $\int \cos(x)\, e^x\,\mathrm{d}x$
   c) $\int x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion
   $$f(r) = \frac{1}{r^2}$$
   in den Grenzen 1 und ∞.
4. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = 2\sqrt{x}$ für $0 < x < 10$.
   Hinweis: Die Stammfunktion von $-\frac{\sqrt{1+t}}{t^2}$ ist $\frac{\sqrt{t+1}}{t} + \operatorname{cotanh}^{-1}(\sqrt{t+1})$.
5. Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Funktion im gegebenen Intervall:
   $$x = \cos^3(t);\ y = \sin^3(t)$$
   für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
6. Das Kugelvolumen ist zu berechnen, indem man einen Kreis um seinen Durchmesser rotieren lässt.

Komplexe Zahlen

1. Berechnen Sie folgende Brüche und vereinfachen Sie soweit wie möglich:
   a) $\frac{-12i}{(-1+i)^3}$
   b) $\frac{-3-2i}{(1-i)^2}$
   c) $\frac{(3-i)^2}{1+3i}$
2. Stellen Sie $\tan(x)$ durch $e-$Funktionen mit komplexen Zahlen dar.
3. Formen Sie den folgenden Ausdruck so um, dass keine komplexen Zahlen mehr vorhanden sind:
   $$\frac{i}{2}\left(e^{ix-y}+e^{-ix-y}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right).$$
4. Berechnen Sie alle reellen und komplexen Wurzeln von
   $$\sqrt[5]{32}$$
   und stellen Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene dar.
5. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung
   $$x^3 = \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{8i}{\sqrt{2}}$$
   .
6. Bestimmen Sie sämtliche reellen und imaginären Lösungen der Gleichung:
   $$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$$
7. Berechnen Sie für $z_1 = 5\mathrm{e}^{\left(i\frac{5\pi}{3}\right)}$, $z_2 = 2(\cos(30°) + \mathrm{i}\sin(30°))$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich:
   a) $z_1 \cdot {z_2}^2$
   b) $\frac{z_1}{z_2}$
   c) $\frac{z_2}{z_1}$

Partialbruchzerlegungen

1. Gesucht ist die Partialbruchzerlegung folgender Funktionen in $\mathbb{R}$:
   a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
   b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}$
2. Gesucht ist die Partialbruchzerlegung folgender Funktionen in $\mathbb{C}$:
   a) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$
   b) $f(z) = \frac{z}{(z-\mathrm{i})(z+1)^2}$

Differentiation von Feldern

1. Berechnen Sie grad $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und zeichnen Sie das Feld.
2. Sei $A(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ein 2-dimensionales Skalarfeld. Berechnen Sie den Vektor, der im Punkt $1, 1$ tangential an die Äquipotentiallinie liegt?
3. Wie stark ändert sich das Feld $F(x, y, z) = \frac{1}{3}z^3 - x^2 - y^2$ vom Punkt $P_1 = (2, -4, 3)$ aus in Richtung $P_2 = (1, -3, 2)$?
4. Beweisen Sie, dass ein Gradientenfeld grad $u\,(x, y, z)$ wirbelfrei ist, d.h. rot grad $(u) = 0$.
5. Der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ ist der Gradient welchen Skalarfeldes $\phi(\vec{r})$?
6. Berechnen Sie grad $(V(\vec{x}))$ für: $V(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
7. Berechnen Sie die Divergenz des Feldes $\vec{A} = \varphi \cdot \vec{F}$ mit $\varphi(x, y, z) = x^2 e^{yz}$ und $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)^T$.
8. Berechnen Sie die Rotation des Feldes $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ 2xyz \\ x^2 z - y^2 z \end{pmatrix}$.
9. Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^3 \\ xz^3 \\ 3xyz^2 \end{pmatrix}$ rot$(\vec{V})$, div$(\vec{V})$ und grad$(\vec{V})$ und gegebenenfalls ein Potential $\Phi(x, y, z)$.

Integration von Feldern

1. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+x+yz \\ 1+y+xz \\ 1+z+xy \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang eines Parabelbogens vom Punkt $P_1 = (0,0,0)$ zum Punkt $P_2 = (1,1,1)$.

2. Berechnen Sie $\int\limits_{(0,0)}^{(2,8)} grad\,(F)\,d\vec{s}$ entlang $y = x^3$ mit $F = x^2 - y^2$.

3. Berechnen Sie für das Kraftfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ -xy^2 \\ z \end{pmatrix}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ das Kurvenintegral entlang des Weges $y(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ von $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{A}(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_1,x_3)^T$ durch die obere Halbkugel H_R mit Mittelpunkt $\vec{x} = 0$ und Radius R, indem Sie diese Fläche mittels
$$\vec{x}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$
mit $(\vartheta,\varphi) \in [0,\pi/2] \times [0,2\pi]$ parametrisieren. Tipp: Das Oberflächenelement $d\vec{f}$ ist gegeben durch
$$d\vec{f} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi} d(\vartheta,\varphi).$$

Differentialgleichungen

1. Welche der folgenden Differentialgleichungen sind linear? ($a, b \in \mathbb{R}$)
   a) $u'(x) + \cos(x)u(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$
   b) $u'''(x) + 3u''(x) + 3u'(x) + u(x) = x + 6e^{-x}$
   c) $v'(t) + tv'(t)v(t) = -\gamma v(t)$
   d) $u''(x) + (u'(x))^2 = ax^2 - bu(x)$

2. Welche der folgenden Differentialgleichungen sind separabel?
   a) $xy'(x) = \frac{y(x)}{x^2}$
   b) $x^2 y'(x) = \sin(y(x) + x)$
   c) $y'(x) = e^{(x+y(x))}$
   d) $\sqrt{x}y'(x) = (y(x))^2 + x$

3. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2xy(x) - (1 - x^2)y'(x) = 2xe^{x^2}$$

4. Finden sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:
   a) $y'(x) = \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}\cdot(y(x))^2};\ x > 0; y(0) = 3$
   b) $y' + 3y = -\cos x, y(0) = 5$

5. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:
   a) $\frac{y''}{2} - 3y' = -5y + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
   b) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{2\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - 13y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

   Hinweis: Aus einer Superposition von Lösungen mit komplexen Eigenwerten lässt sich durch eine passende Linearkombination eine reelle Lösung konstruieren.

6. Eine Masse von 5 kg dehnt eine Feder um 0,1 m. Dieses System befindet sich in einer viskosen Flüssigkeit. Durch diese Flüssigkeit wirkt auf die Masse bei einer Geschwindigkeit von 0,04 m/s eine bremsende Kraft von 2 N. Es wirkt eine äußere Kraft $F(t) = 2\cos(\omega t)N, t > 0, \omega \in \mathbb{R}$. Für die Erdbeschleunigung können Sie $g = 10m/s^2$ annehmen.
   a) Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung für die Auslenkung dieses Federpendels auf.
      Hinweis: Es handelt sich in diesem Fall um die allgemeine Form des harmonischen Oszillators mit Dämpfungterm und harmonischer äußerer Anregung.
   b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung diese Problems.
      Hinweis: Lösen Sie die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung durch einen Exponentialansatz $y_h(t) = e^{\lambda t}$. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung können Sie durch den Ansatz vom *Typ der rechten Seite* ermitteln. Dazu wählen Sie $y_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.