Skriptum zur Vorlesung

Analysis in einer Variable für das Lehramt

an der Universität Wien für das Unterrichtsfach Mathematik im Rahmen des Lehrverbundes Nordost im Sommersemester 2019

von Bernhard Krön

KPH Wien/Krems
http://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen
bernhard.kroen@kphvie.ac.at

Dies ist eine vorläufige Fassung. Bitte teilen Sie mir Fehler und kritische Anmerkungen mit.

Version vom 04.08.2019

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 0

Zum Aufbau der Vorlesung und den Grundlagen

0.1. Quellen

Dieses Skriptum ist weitgehend neu verfasst. Auszüge aus den Unterlagen zur Vorlesung “Einführung in die Analysis” aus dem Sommersemester 2013 und der anschließenden “Analysis in einer Variablen für Lehramtskandidat/innen” aus dem Wintersemester 2013/14 an der Universität Wien wurden verwendet. Die vorliegende Darstellung der Analysis hat jedoch einen grundlegend anderen Aufbau, der nun ähnlich der Schulmathematik eher konstruktiv und geometrisch ist. Er entspricht am ehesten jenem von Endl und Luh in “Analysis I” (siehe [**3**]).

0.2. Voraussetzungen

Relevante Inhalte der Studieneingangs- und Orientierungsphase werden vorausgesetzt oder nur kurz wiederholt. Es wird empfohlen, die Vorlesung zu besuchen und nicht nur nach dem Skriptum zu lernen. Der Stoff ist aufbauend. Theoretische Konzepte müssen durch eine aktive Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben verinnerlicht werden, um Sicherheit zu gewinnen. Das erfordert viel Zeit.

Die standardisierte Reife- und Diplomprüfung (SRDP) hat viele Vorteile gegenüber früheren Missständen im Zusammenhang mit der Mathematikmatura, jedoch lässt sich beobachten, dass Absolvent/innen der Zentralmatura tendenziell weniger geübt im Rechnen mit Termen sind, was wenig verwunderlich ist, da solche Fähigkeiten kaum noch abgeprüft werden. Dies ist allerdings nicht als Kritik an der Zentralmatura gemeint, schließlich ist fortgeschritteneres Termrechnen im Rahmen einer höheren Allgemeinbildung nicht argumentierbar. Diese operativen Kompetenzen sind allerdings wesentlich beim Erarbeiten und Verinnerlichen der Analysis. Studierende sollten daher ihre Fähigkeiten beim Rechnen mit Termen bei jeder Gelegenheit überprüfen, eventuelle Defizite orten und beheben. Über Rückmeldungen zu konkreten diesbezüglichen Schwierigkeiten sind auch die Leiter/innen der Übungen dankbar.

0.3. Mathematik - entdeckt oder erfunden?

Eine Definition von Mathematik soll an dieser Stelle nicht gegeben werden. Stattdessen verstehen wir das als Mathematik, was verbreitet als Mathematik bezeichnet wird. Ist Mathematik etwas, das in der Natur entdeckt oder von Menschenhand erschaffen wird? Mathematik gibt es in beiden Formen, naturimmanent und unabhängig von allen Lebewesen, jedoch auch als von Menschen erschaffene Theorie mit Aussagen und Objekten, die außerhalb dieser Theorie nicht existieren.

0.3.1. Naturimmanente Mathematik. In seiner Dissertation "Die Kontinuität von Bewusstsein" vertritt der renommierte Tierrechtler, Philosoph, Physiker und Mathematiker Martin Balluch einen naturwissenschaftlichen Determinismus und bezieht Stellung gegen Poppers Emergenztheorie, in der die Position vertreten wird, gänzlich neue Qualitäten könnten aus vorhandenen hervortreten (emergieren):

> "Diese Ansicht [Anm: Poppers Vorstellung von der Emergenz neuer gesetzartiger Eigenschaften beruhend auf seiner Meinung, das physikalische Universum sei fundamental indeterministisch.] basiert aber auf der Annahme, dass die mathematische Beschreibung eines physikalischen Systems ein 'Modell' des Systems wäre, das sozusagen die beobachtbaren Eigenschaften des Systems beschreibt, aber nicht die Wirklichkeit. Nur dann könnten 'neue' Eigenschaften bei einer Änderung des Systems plötzlich und unerwartet entstehen, die ein neues Modell der Beschreibung des Systems mit neuen Parametern notwendig machen.
>
> Die Mathematik ist aber auf viel fundamentalere Weise mit der physikalischen Wirklichkeit verknüpft. Mathematische Beschreibungen von physikalischen Systemen sind keine an empirische Eigenschaften des Systems angepassten Modelle, sondern sie werden entdeckt, sie sind praktisch mit dem System ident. Diese Einsicht ergibt sich nicht nur aus der Praxis, wenn man selbst mathematische Physik betreibt, sondern sie wird auch durch verschiedene Erfahrungen bestätigt. [**1**, Kapitel 1.3] "

Balluch gibt im folgenden Text überzeugende Belege dafür, dass auch höhere Mathematik in der physikalischen Welt real vorhanden ist und nicht nur etwas ist, das der Mensch als Modell an die Natur anlegt:

(1) Die allgemeine Realtivitätstheorie wurde nicht als Modell an die Natur angepasst, sondern aufgrund theoretischer Überlegungen von Einstein vorhergesagt. Hulse und Taylor erhielten 80 Jahre später im Jahr 1993 den Nobelpreis für den empirischem Nachweis mit einem maximalen relativen Fehler von 10^{-14}. "Wenn die mathematische Beschreibung nur ein Modell gewesen wäre, wäre diese Genauigkeit der Vorhersage in Bereichen, die bei Erstellung der Theorie noch unbekannt waren, unplausibel." [**1**, Kapitel 1.3]'
(2) Komplexwertige Quantenzustände sind real existent. "Es wurde bereits experimentell bewiesen, dass es keine versteckten Variablen, also eine versteckte Realität hinter der mathematischen Beschreibung der Quantenzustände gibt. Sie sind die Realität und kein Modell für die Realität." [**1**, Kapitel 1.3]'
(3) Die spezielle Relativitätstheorie ist nicht einfach ein besseres Modell als die Newtonsche Mechanik, "sondern eine tiefere Einsicht in die Realität." [**1**, Kapitel 1.3]

Auch viele innermathematische Phänomene sind naturgegeben und nicht von Menschen erschaffen, zum Beispiel dass das Verhältnis aus Kreisumfang und Kreisdurchmesser (die Zahl π) im Grenzwert von verschiedenen schönen

Zahlenreihen auftritt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots, \qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

0.3.2. Vom Menschen erschaffene Mathematik. Aus dem Umstand, dass es naturimmanente Mathematik gibt, abzuleiten, dass alle Mathematik naturimmanent sei, wäre unzulässig. Es gibt auch Mathematik, die nur von Menschenhand erschaffen wurde. Diese existiert in der physikalischen Welt ohne die Menschen nicht.

0.3.2.1. *Mathematik als Theoriegebäude.* Wenn wir ein tieferes Verständnis für naturimmanente Mathematik entwickeln wollen, benötigen wir eine Sprache, in der wir darüber sprechen können, eine Theorie, in der wir mit den mathematischen Phänomenen der Natur arbeiten können. Diese Theorie selbst ist unabhängig von der mit ihr behandelten Mathematik etwas, das wir als Mathematik bezeichnen, und sie ist von Menschenhand erschaffen und nicht in der Natur entdeckt worden.

Die Basis der modernen mathematischen Theorie, auf die sich die Wissenschaft Anfang des 20. Jahrhunderts geeinigt hat, besteht aus Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiomatik mit oder ohne Auswahlaxiom) und Logik (Prädikatenlogik). Alle Objekte in dieser Theorie, ob Zahlen, Funktionen, geometrische oder algebraische Strukturen, sind Mengen und Logik ist die Sprache, in der Aussagen über diese Objekte getroffen werden. Dadurch konnten zuvor voneinander getrennte mathematische Teilgebiete wie Geometrie, Algebra oder Zahlentheorie in einer Theorie zusammengeführt werden. Dies hatte enorm fruchtbare Konsequenzen.

Die Analysis ist Ergebnis einer Entwicklung, die sich vom 17. Jahrhundert bis in das frühe 20. Jahrhundert vollzogen hat. Manche fundamentalen Erkenntnisse zu den Grundlagen der modernen Mathematik konnten erst im 20. Jahrhundert erlangt werden (z.B. die Gödelschen Unvollständigkeitssätze). Unbestritten ist, dass es auch historische Gründe dafür gibt, dass das Gebäude der modernen Mathematik so ist, wie es ist. Es könnte genauso gut anders aussehen. Der Aufbau des gesamten mathematischen Theorie (Zermelo-Fraenkel-Axiomatik mit Auswahlaxiom) und der Analysis im Speziellen ist, überspitzt formuliert, nur eine vorherrschende Lehrmeinung, die sich durchgesetzt hat. In der Nichtstandardanalysis wird beispielsweise mit unendlich kleinen Größen gerechnet und in der konstruktiven Mathematik auf das Auswahlaxiom verzichtet.

0.3.2.2. *Nicht-konstruktive Objekte als Folge des Auswahlaxioms.* Das Auswahlaxiom impliziert die Existenz von Objekten, die nicht konstruktiv beschreibbar sind, wie zum Beispiel nicht messbare Mengen reeller Zahlen, nicht-triviale Ultrafilter oder Wohlordnungen auf überabzählbaren Mengen.

Das Maß eines Intervalls (egal ob offen oder abgeschlossen) ist seine Länge. Eine einzelne reelle Zahl hat daher das Maß 0. Das Maß von abzählbar vielen disjunkten messbaren Mengen, ist die Summe der Maße dieser Mengen. Das Maß eine abzählbaren Menge von Zahlen (die alle Maß 0 haben) ist ebenfalls 0. Das Maß einer Menge die sich aus mehreren Intervallen zusammensetzen, ist die Summe der Intervalllängen. Auf $[0; 1]$ ist eine Äquivalenzrelation dadurch gegeben, dass zwei Zahlen äquivalent genannt werden, wenn ihre Differenz rational ist. Jede dieser Äquivalenzklassen ist abzählbar und hat daher das Maß 0. Da $[0;1]$ überabzählbar ist, gibt es überabzählbar viele solche Äquivalenzklassen. Es sei R eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Dass eine solche Menge R existiert, folgt aus dem Auswahlaxiom. Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $R + q$ die um q verschobene Menge R modulo 1, d.h. der Teil von $R + q$, der beispielsweise rechts über das Intervall $[0;1]$ hinaus ragt, wird abgeschnitten und links an $R + q$ angeklebt. Es gibt in $[0;1]$ abzählbar viele verschiedene solche Mengen $R + q$, die alle das selbe Maß haben, denn wenn eine Menge nur nach links oder rechts verschoben wird, bleibt ihr Maß gleich. Außerdem ist die Vereinigung dieser Mengen, die gleich $[0;1]$ ist, eine disjunkte Vereinigung. Daraus folgt: Wenn R Maß 0 hätte, dann hätte $[0;1]$ als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Mengen $R + q$ das Maß $0 + 0 + 0 + \ldots = 0$. Das Intervall $[0;1]$ hat aber Maß 1 und nicht 0. Wenn R ein Maß $\varepsilon > 0$ hätte, dann hätte die Vereinigung aller Mengen $R+q$ das Maß $\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\ldots = \infty$, auch das ist also unmöglich. Das Maß von R müsste eine Zahl sein, die, wenn man sie abzählbar oft addiert, 1 ergibt. So eine Zahl gibt es nicht. Die Menge R hat also kein Maß, obwohl sie eine Teilmenge von $[0;1]$ ist. Noch absurder als dieser Umstand erscheint, dass zwar aus dem Auswahlaxiom die Existenz von R folgt, es aber unmöglich ist, ein solche Menge sinnvoll zu beschreiben. Niemand kann so eine Menge jemals sehen oder konkret erfassen, sie existiert nur in einer formalen Theorie und nicht in der realen Welt. Das überabzählbar oft durchgeführte Auswählen eines Elements aus jeder der überabzählbar vielen Äquivalenzklassen ist also ein Vorgang, den man irreal nennen könnte.

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen von X, die (1) abgeschlossen unter endlicher Durchschnittsbildung ist. Das heißt, wenn $F_1, F_1 \in \mathcal{F}$, dann ist auch $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Außerdem enthält der Filter jede Obermenge einer Menge des Filters, das heißt: (2) Wenn $F \in \mathcal{F}$ und $F \subset O \subset X$ dann folgt $O \in \mathcal{F}$.

Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ zu $\mathcal{F}$ ist ein größtmöglicher Filter auf X, der $\mathcal{F}$ enthält. Es gibt also keinen Filter auf X, der $\mathcal{U}$ als echte Teilmenge enthält. Ultrafilter erkennt man an einem einfachen Kriterium, es muss nämlich für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder A oder $X \setminus A$ ein Element des Ultrafilters sein. Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist.

Zu einem beliebigen Element $x \in X$ sei $\mathcal{U}_x$ die Menge aller Teilmengen von X, die x enthalten. Dieses $\mathcal{U}_x$ ist ein Ultrafilter. Ultrafilterfilter diese Art nennen wir trivial. Wir können aber auch einen Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{Q}$ definieren, der aus allen Mengen F besteht, für die es eine natürlich Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass das (rationale) Intervall $(0;1/n)$ in F enthalten ist. Der Duchschnitt aller solcher Filtermengen ist leer. Für einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{Q}$, der $\mathcal{F}$ enthält, gilt das gleiche. Dies ist ein Beispiel eines nicht trivialen Ultrafilters. Dass so ein $\mathcal{U}$ existiert, lässt sich wie erwähnt aus dem Auswahlaxiom ableiten. Es kann jedoch auch bewiesen werden, dass es unmöglich ist, $\mathcal{U}$ mit einer endlichen Zeichenfolge vollständig zu beschreiben. Ein solcher Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist ein weiteres Beispiel eines Objekts, das im Rahmen einer mathematischen Theorie existiert, das aber nicht als Objekt der physikalischen Welt außerhalb der von Menschen entwickelten Theorie existieren kann. In der Mathematik kann mit nicht trivialen Ultrafiltern sogar sinnvoll gearbeitet werden, z.B. in der Non-Standard-Analysis.

Ein weiteres Beispiel eines nicht konstruktiven Objekts sind Wohlordnungen auf $\mathbb{R}$. Ein Menge ist wohlgeordnet, wenn jede ihrer Teilmengen ein kleinstes Element hat. Auf den ganzen Zahlen kann eine Wohlordnung z.B. folgendermaßen definiert werden:

$$0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < \dots.$$

Auch auf den rationalen Zahlen kann mit der Diagonalisierung, mit der auch gezeigt wird, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind, eine Wohlordnung explizit angegeben werden. Mit dem Auswahlaxiom lässt sich der sogenannte Wohlordnungssatz zeigen. Er besagt, dass auf jeder Menge ein Wohlordnung definiert werden kann. Doch wie soll eine Wohlordnung auf einer überabzählbaren Menge wie $\mathbb{R}$ aussehen? Das sprengt unsere Vorstellungskraft schon alleine deshalb, weil es nicht möglich ist eine solche Wohlordnung konkret anzugeben.

Da mit dem Auswahlaxiom die Existenz von absurd anmutenden irrealen Objekten gezeigt werden kann, wundert es nicht, dass viele konstruktivistische Mathematiker/innen dieses Axiom abgelehnt haben. Wer naturimmanente reale Mathematik erforschen will, ist vielleicht besser beraten, ohne dieses Axiom zu arbeiten? Doch der überwiegende Teil der Mathematiker/innen wollte nicht auf das Auswahlaxiom verzichten und so hat sich seine Verwendung in der modernen Mathematik durchgesetzt. Auch wenn das Auswahlaxiom oft sehr praktisch ist, sollten Mathematiker/innen es nur dann einsetzen, wenn es notwendig ist bzw. sich dessen stets bewusst sein, wenn sie es verwenden.

Das Theoriegebäude der Mathematik an sich sowie nicht konstruktive Objekte sind Beispiele von Mathematik, die der Mensch erschaffen hat und die nicht in der physikalischen Welt entdeckt werden können.

Dies ist eine Vorlesung über ein von Menschen erschaffenes Theoriegebäude, doch die hier präsentierte Analysis ist eine Theorie, mit der bestimmte naturimmanente Mathematik verstanden werden kann.

0.4. Zur Notwendigkeit, Zahlenbereiche als Mengen zu konstruieren

Die Frage, wie die Zahlenbereiche (insbesondere die reellen Zahlen) eingeführt werden sollen, beschäftigt die universitäre Lehre, seit die Mathematik im frühen 20. Jahrhundert auf ein strenges formales Fundamet gestellt wurde. Edmund Landau schreibt 1929 im Vorwort zu seinen "Grundlagen der Analysis" [**4**]:

"Dies Büchlein ist eine Konzession an die (leider in der Mehrzahl befindlichen) Kollegen, welche meinen Standpunkt in der folgenden Frage ***nicht*** *teilen.*

Auch wer Mathematik hauptsächlich für die Anwendungen auf Physik und andere Wissenschaften lernt, also vielfach sich selbst weitere mathematische Hilfssätze zurechtlegen muß, kann auf dem betretenen Pfade nur dann sicher weiterschreiten, wenn er gehen gelernt hat, d.h. zwischen falsch *und wahr, zwischen Vermutungen und Beweisen (oder, wie manche so schön sagen, zwischen unstrengen und strengen Beweisen) unterscheiden kann.*

Darum finde ich es (...) richtig, daß der Studierende bereits im ersten Semester lernt, auf welchen als Axiomen angenommenen Grundtatsachen sich lückenlos die Analysis aufbaut und wie dieser Aufbau begonnen werden kann. Bei der Wahl der Axiome kann man bekanntlich verschieden verfahren; ich erkläre es also nicht etwa für falsch, sondern für meinem persönlichen Standpunkt fast diametral entgegengesetzt, wenn man für reelle Zahlen zahlreiche der üblichen Rechengesetze als Axiome postuliert."

Ganz ähnlich sieht das Charles Chapman Pugh in [**6**, Section 1.2] *"The current mathematics teaching trend treats the real number system $\mathbb{R}$ as a given — it is defined axiomatically. Ten or so of its properties are listed, called axioms of a complete ordered field, and the game becomes: deduce its other properties from the axioms. This is something of a fraud, considering that the entire structure of analysis is built on the real number system. For what if a system satisfying the axioms failed to exist? Then one would be studying the empty set! However, you need not take the existence of the real numbers on faith alone — we will give a concise mathematical proof of it."*

Landau geht von den Peano-Axiomen aus, wohingegen Pugh natürliche Zahlen ohne Axiomatik als gegeben annimmt. Wenn wir eine Mathematik betreiben wollen, in der Mengen verwendet werden (und das wollen wir), dann stellt sich eine weitere Frage: Gibt es die (oder eine) Menge natürlicher Zahlen? Gibt es eine Menge, die die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen erfüllt? Diese Frage muss beantwortet werden, auch wenn die Antwort einfach und kurz ist: Die Existenz einer solchen Menge folgt aus dem Unendlichkeitsaxiom der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre. Und gibt es überhaupt eine Menge? Eine solche Frage ist im Rahmen einer mathematischen Theorie, deren Basis nur aus Mengenlehre und Logik besteht, nicht ganz richtig gestellt, weil ein Objekt offenbar außerhalb der formalen Theorie in der realen Welt gesucht wird. Die Frage müsste lauten: Ist das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre widerspruchsfrei? Hier wird die Sache etwas komplizierter: Gödel hat gezeigt, dass jedes hinreichend große widerspruchsfreie formale System die eigene Widerspruchsfreiheit nicht zeigen kann. Dies trifft auch auf die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre zu. Das heißt, wenn wir mit ihr arbeiten, können wir nicht beweisen, dass sie widerspruchsfrei ist, auch wenn sie es wohl ist, woran niemand zweifelt.

Ein besonderes Axiom der Mengenlehre ist das Auswahlaxiom (axiom of choice), weil es die Existenz von Objekten impliziert, die nicht konstruktiv beschreibbar sind (vgl. 0.3.2.2), weswegen es von manchen Mathematiker/innen vermieden oder gar abgelehnt wird. Mit ZFC wird die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre (ZF) zusammen mit dem Auswahlaxiom (C) bezeichnet. Sie hat sich als mächtige Grundlage der Mathematik etabliert. Zusammen mit der Prädikatenlogik im Hintergrund lassen sich die unterschiedlichen Teildisziplinen der gesamten Mathematik in einer Theorie vereinen, was ZFC so attraktiv macht.

Alle Zahlenbereiche lassen sich aus ZF ableiten. Weder die Peano-Axiome noch die Axiome der reellen Zahlen als vollständig geordneter Körper sind für uns also eine Grundlegung der Zahlenbereiche, sondern nützliche Charakterisierungen. Das heißt, sie helfen uns, Theoreme folgender Art zu formulieren: *Die aus der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre konstruierten Zahlenbereiche (z.B. die reellen Zahlen) erfüllen zusammen mit den darauf definierten Rechenoperationen eine bestimmte Liste von Axiomen (z.B. jene der reellen Zahlen als vollständig geordneter Körper) und jedes andere Objekt, das diese Axiome auch erfüllt, ist isomorph zu diesem Zahlenbereich.* Auch wenn die Axiomatiken der Zahlenbereiche keine Grundlegungen darstellen, dienen sie als nützliches Basislager auf halber Höhe des Berges, von dem aus wir den Gipfel besteigen können. Unten im Tal befinden sich Logik und Mengenlehre als Ausgangspunkt.

Das erste Problem bei der von Landau empfohlenen Vorgehensweise ist der enorme Zeitaufwand, der nötig ist, um dies rigoros und vollständig zu tun. Nachdem Rudin 1953 in [**8**] die reellen Zahlen zunächst rigoros über Dedekindschnitte eingeführt hat, schreibt er in seinem Vorwort zur dritten Auflage [**9**] von 1976 über das zweite, nämlich das mathematisch-didaktische Problem bei der Konstruktion reeler Zahlen: *"Experience has convinced me that it is pedagogically unsound (though logically correct) to start off with the construction of the real numbers from the rational ones. At the beginning, most students simply fail to appreciate the need for doing this."*

Ich selbst habe als junger Assistent an der TU Graz einmal für eine Woche vertretungsweise die Analysisvorlesung für angehende Ingenieure übernommen und musste ein paar der Körperaxiome der reellen Zahlen basierend auf der Konstruktion durch Dedekindschnitte nachweisen. Dabei machte ich dieselbe Erfahrung wie Rudin. Die Beweisführungen waren technisch und die Studierenden verstanden nicht, warum sie so etwas lernen sollten.

Doch man muss den Studierenden natürlich nicht nur die theoretische Notwendigkeit, sondern auch den praktischen Nutzen einer mengentheoretischen Konstruktion der Zahlenbereiche erklären, und zwar nicht den Nutzen eines lückenlosen vollständigen Beweises, sondern den Nutzen, zu verstehen, warum und wie reelle Zahlen konstruiert werden.

Dieser praktische Nutzen ist erstens ein wissenschaftlicher: Wie zuvor erwähnt, lassen sich durch einen Aufbau der gesamten Mathematik auf Basis der Mengenlehre alle Teildisziplinen der Mathematik vereinigen, was sich im Laufe des 20. Jahrhunderts als außerordentlich fruchtbar erwiesen hat.

Der zweite praktische Nutzen ist ein didaktischer für schulische Lehrkräfte: Zu verstehen, wie die gesamte Mathematik auf die Mengenlehre aufbauend konstruiert wird, befähigt Lehrende zu verstehen, warum in der Neuen Mathematik der 1960er- und 70er-Jahre ausgerechnet die Mengenlehre eine so große Rolle gespielt hat und warum diverse Axiomatiken (oder Auszüge daraus) damals Eingang in die Schulmathematik gefunden haben. Der Begriff "Nachfolger einer natürlichen Zahl" ist ein ganz spezifischer Fachbegriff der Peano-Axiomatik, dessen Existenz in der Schulmathematik nur historisch (und nicht didaktisch) erklärt werden kann. Lehrkräfte müssen den Aufbau der modernen Mathematik verstehen, weil sie nur dann in der Lage sind, schulmathematische Traditionen kritisch zu hinterfragen, was zweifellos notwendig ist. Nur wer versteht, welchen Sinn Axiomatiken und Mengenlehre für die wissenschaftliche Mathematik haben, kann argumentieren, dass diese Ansätze im Rahmen einer schulischen Allgemeinbildung meistens keinen Sinn machen.

Ein dritter Nutzen liegt darin, am Beispiel der Mathematik zu verstehen, was eine formale Theorie ist. Erst dadurch kann zwischen naturimmanenter Mathematik und der Mathematik als formaler Wissenschaft unterschieden werden. Mathematik als formale Wissenschaft wiederum ist ein Beispiel einer axiomatischen wissenschaftlichen Theorie mit spezifischen Grundlagen und Grenzen der Beweisbarkeit. Bewusst zu machen, dass die moderne Mathematik auf nichts anderem als der Zermaelo-Fraenkelschen Axiomatik und der Prädikatenlogik aufbaut, stellt somit einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis von Wissenschaften im Allgemeinen (insb. von Naturwissenschaften) dar. Es ist wichtig, in höheren Schulen auch über Möglichkeiten und Grenzen einer naturwissenschaftlichen Theorie nachzudenken und unterscheiden zu lernen zwischen Phänomenen der realen Welt und erklärenden Thesen, zwischen Wissenschaft und Pseudowissenschaft, zwischen Glaube, Spekulation, Empirie und - wie im Fall der Mathematik - einer formalen Theorie. Wir müssen leider davon ausgehen, dass die meisten Studierenden nie eine Lehrveranstaltung über Mengenlehre oder Grundlagen der Mathematik belegen werden können. Die Analysis bietet eine einmalige Chance, einen Einblick in dieses Theoriegebäude der Mathematik zu bekommen.

Diese drei Überlegungen stellen den "need for doing this" dar und die Studierenden werden dies auch schätzen ("appreciate"), wenn Notwendigkeit und Nutzen entsprechend erklärt werden.

Die Vollständigkeit ist die zentrale Eigenschaften, die die reellen von den rationalen Zahlen unterscheidet. Um sich ihrer Bedeutung bewusst zu werden, betrachten wir vor der Konstruktion der reellen Zahlen einfache Beispiele nicht konvergenter rationaler Cauchy-Folgen, ohne jedoch schon an dieser Stelle Grenzwertsätze zu behandeln.

Es werden drei Möglichkeiten angeführt, reelle Zahlen durch rationale Zahlen zu konstruieren: Dezimalbruchentwicklungen, Dedekind-Schnitte und Cauchy-Folgen. Ich lege zwar Wert darauf, die Konstruktion der Zahlenbereiche aus der Mengenlehre sichtbar zu machen, aber ich beschränke mich nur auf die Einführung der Zahlen und verzichte sogar auf die Definition der Rechenoperationen und somit gänzlich auf das Beweisen der algebraischen Eigenschaften der konstruierten Zahlenbereiche. Dies geschieht aus zeitökonomischen Gründen. Außerdem ist die vollständige Herleitung aller Rechengesetze (Körperaxiome) im Kontext von Dedekindschnitten oder Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen für die Studierenden zu wenig lehrreich, als dass der dafür nötige Aufwand gerechtfertigt werden könnte.

Dedekind-Schnitte sind intuitiv leicht zu erfassen. Ein Nachteil ist, dass sie abgesehen von der Konstruktion der reellen Zahlen keine Verwendung finden. Cauchy-Folgen hingegen haben auch im späteren Aufbau der Analysis eine große Bedeutung. Die Dezimalbruchentwicklung ist zwar im Theorieaufbau wenig elegant, doch für die Schule liefert sie die einzig sinnvolle Definition reeller Zahlen: Reelle Zahlen sind Kommazahlen.

In einem Nachschlagewerk beziehungsweise Handbuch zur Analysis oder in einem Lehrbuch, das den Anspruch der formalen Vollständigkeit erhebt, muss man sich zunächst für eine der Konstruktionen der reellen Zahlen entscheiden und daraus alle Axiome eines vollständig geordneten Körpers ableiten. Im Kontext eines Grundkurses ist dies wie gesagt erstens zu zeitraubend und zweitens im Verhältnis zum erforderlichen Aufwand zu wenig lehrreich. Abgesehen von der Herleitung mancher Eigenschaften der reellen Zahlen, werden jedoch alle nachfolgenden Ausführungen bewiesen.

0.5. Von der Menge nach oben und nach unten

So wie die Chemiker die Welt aus Atomen aufgebaut sehen, so bauen Mathematiker ihre Welt aus Mengen und Logik. Kernphysiker interessieren sich aber nicht dafür, was man aus Atomen bauen kann. Sie zerlegen auf der Suche nach dem Ursprung die Atome in möglichst kleine Einzelteile, um Materie besser zu verstehen. Wie sieht das in der Mathematik aus? Was passiert, wenn wir die Frage nach dem "Was" weiter treiben? Was ist eine Menge? Was ist eine Aussage? Was sind die Urteilchen der Mathematik? Irgendwann müssen wir ein Zeichen auf ein Papier machen, ein "x" oder ein "t", ohne dabei sagen zu können, was das sein soll. Am Ende baut auch die strengste aller Wissenschaften auf etwas auf, das unsicher und unklar ist, über das wir nichts wissen und nichts sagen können. Das letzte Urteilchen der Mathematik gibt es nicht. Ab der ersten Grundsteinlegung ist die Mathematik allerdings zu hundert Prozent sicher und, wenn wir so wollen, "wahr". Das ist es, was diese Wissenschaft vor allen anderen auszeichnet.

0.6. Stetigkeit, Grenzwerte von Funktionen und Ableitung

Stetigkeit ist ein Hilfsmittel und liefert isoliert betrachtet keine überzeugenden Ergebnisse. Allerdings ist das Konzept der Stetigkeit zentral im wissenschaftlichen Aufbau der Analysis. Nicht nur die Stetigkeit, sondern auch alle anderen zentralen Begriffe der Analysis entwickle ich diesmal nur über Grenzwert von Folgen und Funktionen, weil die Studierenden ohnehin laufend Grenzübergänge durchführen müssen. Außerdem hat die Begriffsbildung über Folgen ein Naheverhältnis zur Schulmathematik. Für die Konvergenz spielt die Formulierung "in jeder Umgebung liegt die Folge ab einer Stelle" eine zentrale Rolle. Stetigkeit an einer Stell p wird über Folgenstetigkeit behandelt: "Für jede Folge (x_n) mit $\lim x_n = p$ gilt $\lim f(x_n) = f(p)$". Für stetige Funktionen spielt das Vertauschen von Funktion und Grenzwert eine zentrale und immer wiederkehrende Rolle: $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Die Äquivalenz der Folgenstetigkeit zur sonst populären ε-δ-Definition und der topologischen Definition (Urbilder von Umgebungen) wird in einem Satz als Exkurs gezeigt. Für Anfänger/innen ist es eine Vereinfachung, nur mit dem einen abstrakten Konzept der Folgenstetigkeit zügig zur Differential- und Integralrechnung zu gelangen. Weitere Abstraktionen werden besser erst auf eine gefestigte Grundlage aufgebaut.

0.7. Trigonometrische Funktionen und der Satz von Taylor

In meiner ersten Vorlesung zur Analysis habe ich aus folgenden Gründen die trigonometrischen Funktionen über Potenzreihen eingeführt:

(1) Es ist der derzeit am weitesten verbreitete Zugang und ich selbst habe die Analysis als Student so kennengelernt.

(2) Die Definition über die Potenzreihen ist elegant und erspart Arbeit: Potenzen mit irrationalen Exponenten werden durch die Exponentialreihe direkt definiert und müssen nicht über Potenzen mit rationalen Exponenten approximiert werden. Diese Definition erspart auch den Weg von der Bogenlänge (geometrische Definition im rechtwinkeligen Dreieck) hin zur Reihendarstellung.
(3) Da die Definition über die Bogenlänge den Integralbegriff verwendet, können mit der Definition durch Potenzreihen trigonometrische Funktionen vor der Behandlung des Integrals eingeführt und schon bei den Themen Stetigkeit und Ableitung verwendet werden, um interessante Beispiele von oszillierenden Funktionen zu diskutieren, wie Funktionen mit unstetiger Ableitung oder differenzierbare Funktionen mit Extremstellen, die zwar im Inneren des Definitionsbereichs liegen (und somit eine waagrechte Tangente haben), die aber links und rechts an die Extremstelle angrenzend keine Monotoniebereiche besitzen.

Die Definition trigonometrischer Funktionen durch Potenzreihen habe ich jedoch wieder verworfen. Sie hat didaktische Nachteile, birgt die Gefahr einer verkümmerten Darstellung der Beziehung zwischen Geometrie und Reihendarstellung und ist außerdem für Studierende, die das Lehramt anstreben ungeeignet, da dieser Zugang nicht dem Aufbau der Schulmathematik entspricht. Dazu schreiben Kurt Endl und Wolfgang Luh im Vorwort der ersten Auflage ihrer Lehrbücher zur Analysis, nachdem sie erklärt haben, warum es notwendig ist, die reellen Zahlen konstruktiv und nicht nur axiomatische einzuführen:

> "Ebenso wird über Potenzen mit natürlichen und rationalen Zahlen ein konstruktiver Zugang zu den wichtigsten Funktionen der Analysis, der Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktion gegeben. Die heute ebenfalls weithin übliche Einführung mit Hilfe der Exponentialreihe erscheint auch hier den Autoren als ein didaktisch nicht befriedigender Zugang, da diese Reihe am Ende einer Entwicklung steht und diese Einführung deshalb vielen Anfängern als reichlich unmotiviert und willkürlich erscheinen muß. Auch hier können wieder solide handwerkliche Fähigkeiten geübt werden.
>
> Analoges gilt für die Einführung der trigonometrischen Funktionen durch die entsprechenden Reihen. Dabei wird berücksichtigt, daß die Studenten schon in der Schule unter geometrischen Gesichtspunkten mit trigonometrischen Funktionen gearbeitet haben und eine Neudefinition durch Reihen den Anfänger in erheblichem Maß verunsichert. In der vorliegenden Darstellung wird, von der elementaren Definition im Dreieck ausgehend, über den Einheitskreis die analytische Definition mit Hilfe der Bogenlänge am Kreis konstruktiv hergeleitet."

Wenn oben vom "Ende einer Entwicklung" gesprochen wird, dann ist damit gemeint, dass der Weg vom rechtwinkeligen Dreieck und der Bogenlänge (bzw. den Winkelgraden) ausgehend bis zum Satz von Taylor führt, der uns den Zusammenhang mit der Exponentialreihe erklärt. Diese entscheidende Verbindung zwischen Geometrie und Reihendarstellung muss vollzogen werden, ansonsten sind durch Reihendarstellungen bedeutungslose Funktionen definiert. Natürlich kann von der Exponentialreihe ausgegangen und die geometrische Interpretation nachgeliefert werden, wie dies zum Beispiel bei Walter Rudin auf elegante Weise geschieht (siehe Kapitel 8 in [**7**]). In seiner Darstellung ist die geometrische Interpretation im komplexen Einheitskreis kaum mehr als eine Randnotiz. Speziell für den Lehrberuf ist es sicher hilfreich, die Analysis entlang von Bahnen zu erarbeiten, die sich im Nahbereich dessen befinden, was später unterrichtet werden soll. Aber auch für alle anderen Studierenden ist es lehrreich, einmal den Weg von der Geometrie über den Satz von Taylor hin zur Reihenentwicklung gegangen zu sein. Dadurch kann man später die Kraft der komplexen Analysis richtig schätzen lernen.

0.8. Was ist Analysis?

Das zentrale Objekt dieser Vorlesung sind Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Sie sind ein unverzichtbares Modell in Naturwissenschaft, Technik und praktischen Anwendungen aller Art. Um sinnvoll mit ihnen arbeiten zu können, müssen wir sie im "unendlich Kleinen" betrachten, das heißt, wir zoomen mit einem Mikroskop immer tiefer und tiefer an einer Stelle hinein. Das ist die herausragende Eigenschaft der reellen Zahlen: Egal wo wir uns mit dem Mikroskop unendlich tief hineinzoomen, immer wird dort, wo wir das tun, wird am Ende etwas zu sehen sein, ein Punkt und kein Loch. Die Menge der reellen Zahlen ist aber nicht mit dieser Eigenschaft vom Himmel gefallen, sondern so konstruiert, dass sie keine "Löcher" hat. Die Mathematiker nennen das *Vollständigkeit*.

Das Sich-beliebig-nahe-Annähern heißt *Konvergenz*. Sie steckt in allen zentralen Begriffen der Analysis: Stetigkeit, Ableitung, Integral. Damit Konvergenz funktioniert, brauchen wir Zahlenbereiche, die keine "Löcher" haben, die eben vollständig sind.

Eine *offene Kugel* ist die Menge aller Punkte, die zu einem bestimmten Punkt (dem *Mittelpunkt*) einen Abstand haben, der kleiner als der gegebene Radius ist. Im dreidimensionalen Raum sind Kugeln das, was wir uns gemeinhin unter Kugeln vorstellen. In der Ebene sind offene Kugeln Kreisscheiben ohne Randlinie und am Zahlenstrahl sind Kugeln offene Intervalle (ohne Randpunkte). Ein *innerer Punkt* einer Menge ist ein Punkt, der Mittelpunkt einer Kugel (bzw. eines Intervalls) ist, welche ganz in der Menge enthalten ist. Wenn eine Menge nur aus inneren Punkten besteht, nennen wir sie *offen*. Offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind Vereinigungen von offenen Intervallen. Offene Mengen sind Gegenstand der *Topologie*, der Lehre von der Gestalt von Objekten und Räumen. In der Topologie werden offene Mengen auf abstraktere Art axiomatisch definiert.

Begriffe wie *offene Mengen*, *Kompaktheit*, *Konvergenz* oder *Stetigkeit* sind Grundbegriffe der Topologie. Die Analysis ist geprägt durch das Aufeinandertreffen von Arithmetik und Topologie, von konkreten Rechnungen und abstrakten Überlegungen, in deren Mittelpunkt der Grenzwertbegriff steht.

0.9. Der didaktische Nutzen metrischer Räume

Die für die Analysis zentralen Begriffe Konvergenz und Stetigkeit lassen sich ohne zusätzliche Mühe statt in $\mathbb{R}$ in den wesentlich allgemeineren metrischen Räumen behandeln. Dies hat den Vorteil, dass diese Begriffe gleichzeitig auch für komplexe Zahlen und für den $\mathbb{R}^n$ behandelt werden.

Um mit einer formalen Definition arbeiten zu können, bedarf es gefestigter Grundanschauungen. Zeichenfolgen wie

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$$

müssen Studierende zwar lesen und verstehen lernen, aber erst nachdem sie geometrische Grundanschauungen zum Begriff der Konvergenz entwickelt haben. Als Einstiegslektüre ist dieser Formalismus ungeeignet, denn in unseren Köpfen sind keine Computer, die Zeichenfolgen einlesen und verarbeiten, sondern Gehirne, die auch in Bildern denken und Verknüpfungen zu anderen Informationen herstellen wollen. Besser ist es wohl, zuerst den anschaulich leichter erfassbaren Begriff einer Umgebung zu thematisieren und dann Sätze wie "die Folge liegt ab einer Stelle in der Umgebung" zu verwenden. Erst danach wird das in einen logischen Formalismus übersetzt. Dieses Übersetzen ist eine eigene Kompetenz, die gezielt geübt werden kann.

0.10. Schulmathematik und Anschauung

Empfehlenswerte und weniger empfehlenswerte Anschauungen und Definitionen aus dem Schulunterricht werden unter dem Titel "'Schulmathematik und Anschauung" angeführt und besprochen. Dies ist wichtig für schulische Lehrkräfte, die komplexe Konzepte der Analysis anschaulich, aber trotzdem korrekt vermitteln müssen. Diese Ausführungen sollen angehende Lehrkräfte auch befähigen, sich kritisch mit schulmathematischen Quellen auseinanderzusetzen. Für Studierende, die eine reine fachwissenschaftliche Ausbildung anstreben, sind solche Überlegungen ebenso hilfreich.

0.11. Das griechische Alphabet

Mathematikerinnen und Mathematiker sollten das griechische Alphabet mit Groß- und Kleinbuchstaben beherrschen, denn in vielen Quellen werden griechische Buchstaben verwendet. Der Buchstabe π wird mit drei Linien geschrieben, κ, λ, τ, χ und ψ mit zwei Linien, alle anderen Kleinbuchtaben werden mit einer Linie geschrieben. Dabei ist es wichtig, die Linie in der richtigen Richtung zu ziehen. Die Linien der Kleinbuchstaben werden eher von oben begonnen, falls Wahlmöglichkeit besteht (γ, κ, ν, τ, υ, χ, ψ, ω) dann von links und nicht von rechts oben, mit folgenden Ausnahmen: β und μ werden unten begonnen. Mit der Schleife von oben nach unten begonnen werden σ und ρ. Gelegentliche Abweichungen von diesen Regeln sind nicht ausgeschlossen. Wenn σ fälschlicherweise beginnend von rechts oben geschrieben wird, sieht es oft aus wie eine 6. Auf keinen Fall sollten α oder β mit mehreren Linien ähnlich den lateinischen Buchstaben a und b geschrieben werden. Der Buchstabe υ (kleines griechisches Ypsilon) wird in der Mathematik vermieden, da er kaum von einem v (kleines lateinisches V) oder einem kleinen U in Schreibschrift unterschieden werden kann.

Von den Großbuchstaben sind für die Mathematik jene wichtig, die keinem lateinischen Großbuchstaben gleichen: Γ, Δ, Λ, Ξ, Θ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω.

Neben lateinischen und griechischen Buchstaben auch das hebräische Aleph $\aleph$ verwendet, um unendliche Kardinalitäten zu bezeichnen.

0.12. Übungsaufgaben und Computereinsatz

In den Lösungen der Übungsaufgaben sollen alle Argumentationen (ob verbal, durch Rechnung oder durch sonstigen mathematischen Formalismus) schriftlich notiert werden, auch wenn dies in den Aufgabenstelllungen nicht immer explizit gefordert wird. Heuristische Überlegungen oder Skizzen sind sinnvolle Hilfen.

Grundsätzlich sind alle Berechnungen ohne Taschenrechner- oder Computerunterstützung durchzuführen, es sei denn, dies wird ausdrücklich angemerkt. In diesen Fällen wird der Computer meistens dazu verwendet, Funktionsgraphen zu visualisieren oder Folgenglieder explizit auszurechnen, um Vermutungen zu gewinnen, die im Weiteren streng bewiesen werden. Für unsere Zwecke ist Geogebra eine optimale Software, kostenpflichtige Programme werden nicht benötigt.

KAPITEL 1

Zahlen und Folgen

1.1. Konstruktion von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Das Fundament, auf das wir aufbauen, besteht aus Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiome) und Prädikatenlogilogik. Die leere Menge, die mit $\{\ \}$ oder $\emptyset$ bezeichnet wird, ist das einzige Urteilchen dieser Mathematik. Es gibt auch kein sogenannten Urelemente, das wären Elemente einer Menge, die selbst keine Menge sind. Anders gesagt, jedes Element einer Menge ist selbst eine Menge. Jedes mathematische Objekt ist eine Menge. Funktionen, geometrische Objekte, Zahlen, Relationen, Wahrscheinlichkeiten, Grenzwerte, Integrale usw. sind Mengen. Im gesamten Universum der modernen wissenschaftlichen Mathematik bestehen alle Objekte nur aus den zwei Symbolen $\{$ und $\}$ und aus sonst nichts.

Das *Unendlichkeitsaxiom* ist eines der Zermelo-Fraenkelschen Axiome und besagt, dass es eine Menge M gibt, die die leere Menge als Element enthält, und die mit jedem ihrer Elemente x auch die Menge $x \cup \{x\}$ enthält. Eine Menge, die das Unendlichkeitsaxiom erfüllt, enthält die leere Menge $\emptyset$ und somit auch $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$. Da sie $\{\emptyset\}$ enthält, muss sie nach dem Unendlichkeitsaxiom auch $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ enhalten, usw.

Definition 1.1.1. Die *Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null* ist definiert als der Durchschnitt aller Mengen, die das Unendlichkeitsaxiom erfüllen:

$$\mathbb{N} := \{\{\ \},\ \{\{\ \}\},\ \{\{\ \},\{\{\ \}\}\},\ \{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}\},\ldots\}.$$

Das ist die Menge die nur das enthält, was sie enthalten muss um das Unendlichkeitsaxiom zu erfüllen - und nicht mehr. Die so konstruierten natürlichen Zahlen sind äußerst unhandlich. Wir schreiben daher 0 statt $\{\ \}$, 1 statt $0' = \{\{\ \}\}$, 2 statt $\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}$, 3 statt $\{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}\}$ usw.

Für x in $\mathbb{N}$ heißt $x \cup \{x\}$ der *Nachfolger* von x, er wird mit x' bezeichnet. Bevor die Mathematik auf den Grundlagen von Logik und Mengenlehre neu errichtet wurde, wurden die natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiomensystem definiert, in dem der Begriff "Nachfolger" eine zentrale Rolle spielt.

Schulmathematik und Anschauung 1.1.2 (Begriff "Nachfolger" einer natürlichen Zahl in der Schulmathematik).

Im herkömmlichen Sprachgebrauch hat "Nachfolger" ein ganz andere Bedeutung (z.B. der Nachfolger einer Präsidentin oder eines Obmannes). In der wissenschaftlichen Mathematik ist dies ein sehr spezifischer Fachbegriff der nur in der Peano-Axiomatik der natürlichen Zahlen eine Rolle spielt. Er findet sich in diesem Zusammenhang jedoch überraschender Weise auch in die Schulmathematik wieder. Dass 8 dort der "Nachfolger" von 7 genannt wird, und nicht einfach von der nächstgrößeren natürlichen Zahl gesprochen wird, ist ein Fossil aus der Epoche der Neuen Mathematik der 1960er und 70er Jahre, siehe Bogensperger [**2**].

In der internationalen Fachwissenschaft bezeichten $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null und $\mathbb{N}_0$ die natürlichen Zahlen mit Null. Im heimischen Schulwesen sowie in der ÖNORM bezeichnet $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen mit Null und $\mathbb{N}^*$ die natürlichen Zahlen ohne die Null. Wir verwenden im Folgenden die in der Schule gebräuchliche Definition, bei der $\mathbb{N}$ auch die Null enthält.

Auch für alle anderen Zahlenbereiche bedeutet ein Stern $(*)$ im Exponenten, dass die 0 exkludiert ist. Ein Plus $(+)$ im Exponenten eines Zahlenbereichs meint alle positiven Zahlen aus diesem Bereich, ein Minus $(-)$ alle negativen. Die Null ist weder positiv noch negativ.

Die Addition natürlicher Zahlen kann rekursiv definiert werden und die Multiplikation als fortgesetzte Addition. Wir verzichten bei den natürlichen Zahlen und auch bei den weiteren Zahlenbereiche auf die mengentheoretische Konstruktion der Rechenoperationen und auf die entsprechende Herleitung diverser Rechenregeln. Wichtig für uns ist in diesem Zusammenhang jedoch die Erkenntnis, dass die Zahlenbereiche (so wie alle anderen mathematischen Objekte) auf Grundlage der Zaermelo-Fraenkelschen Axiomatik konstruiert werden können.

Definition 1.1.3. Geordnete Paare werden (wie alle mathematischen Objekte) durch Mengen modelliert, z.B. kann (x, y) als $\{x, \{y\}\}$ definiert werden. Für Mengen X und Y ist $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$. Ein *Relation* R auf einer Menge X ist eine Teilmenge von $X \times X$. Eine solche Relation heißt *Äquivalenzrelation* auf X, wenn folgende drei Punkte gelten:

(1) Für alle $x \in X$ ist $(x, x) \in R$ (Reflexivität).
(2) Für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$ (Symmetrie).
(3) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \implies (x, z) \in R$ (Transitivität).

Statt $(x, y) \in R$ kann xRy geschrieben werden oder ein Symbol wie $\sim$ verwendet werden, dann wird $x \sim y$ geschrieben. Ein einzelnes Element einer Äquivalenzklasse wird *Repräsentant* dieser Äquivalenzklasse genannt. Die Äquivalenzklasse eines Repräsentanten $x \in X$ ist $\{y \in X \mid y \sim x\}$ und wird mit $[x]$ bezeichnet (Repräsentantenschreibweise). Die Menge aller Äquivalenzklassen heißt *Quotientenmenge*, diese wird mit $X/\!\sim$ bezeichnet.

Äquivalenzrelationen sind Stoff der StEOP und werden als bekannt vorausgesetzt.

Schulmathematik und Anschauung 1.1.4 (Äquivalenzrelation und Partition). Eine Äquivalenzrelation können wir uns als Partition (d.h. Zerteilung) der Grundmenge vorstellen. Die Äquivalenzklassen entsprechen dabei den Teilen der Grundmenge. Zwei Elemente sind äquivalent, wenn sie im selben Teil liegen.

Satz 1.1.5. *Für (a, b) und (c, d) in $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ und schreiben wir $(a, b) \sim (c, d)$, wenn $a + d = c + b$ ist. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

Diese Relation ist also eine Teilmenge von $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Beweis. Für alle $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ist $a + b = a + b$, also ist $\sim$ reflexiv. Wenn $(a, b) \sim (c, d)$, dann ist $a+d = c+b$ und daher $c+b = a+d$. Also ist $(c, d) \sim (a, b)$ und $\sim$ ist symmetrisch. Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$, dann heißt das $a + d = c + b$ und $c + f = e + d$. Aus $a + d + f = c + b + f$ und $b+c+f = b+e+d$ folgt $a+d+f = b+e+d$ und $a+f = b+e$. Das bedeutet $(a, b) \sim (e, f)$. Somit ist $\sim$ transitiv und eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$. $\square$

Definition 1.1.6. Die *Menge der ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ ist die Quotientenmenge $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$.

Die Äquivalenzklasse

$$\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), \ldots\}$$

entspricht in unserem anschaulichen Zahlenverständnis der ganzen Zahl -2. In der Schreibweise mit Repräsentatanten ist dies $[(0, 2)]$ oder $[(1, 3)]$ oder $[(2, 4)]$ etc.

Für $n \in \mathbb{N}^*$ nennen wir ganze Zahlen mit einem Repräsentanten $(n, 0)$ *positiv*, solche mit einem Repräsentanten $(0, n)$ *negativ* und die ganze Zahl, die $(0, 0)$ enthält, nennen wir die *Null*.

Welche ist nun die richtige natürliche Zahl 2, jene Zahl $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, die wir durch das Unendlichkeitsaxiom aus der Mengenlehre erhalten haben, oder die Äquivalenzklasse $[(2, 0)] = [(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\})]$, die ein Element von $\mathbb{Z}$ ist? Die Zahl 2 kann auf verschiedene Arten modelliert werden. Wenn wir in $\mathbb{Z}$ arbeiten, modellieren wir 2 als Äquivalenzklasse $[(2, 0)]$, die natürlichen Zahlen werden so in $\mathbb{Z}$ eingebettet. Wir sind dann etwas schlampig in der Terminologie und schreiben auch $\mathbb{N}$ statt $\{[(n, 0)] \mid n \in \mathbb{N}\}$, letzteres ist jedenfalls eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

Wir schreiben ab statt $a \cdot b$ für ganze Zahlen a, b und $(a, b) \approx (c, d)$, wenn $ad = cb$.

Satz 1.1.7. *Die Relation $\approx$ ist auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität: $(a, b) \approx (a, b)$ bedeutet $ab = ab$.
Symmetrie: $(a, b) \approx (c, d) \iff (c, d) \approx (a, b)$ ist $ad = cb \iff ca = ad$.
Transitivität: Angenommen, es ist $(a, b) \approx (c, d)$ und $(c, d) \approx (e, f)$, also $ad = cb$ und $cf = ed$. Dann ist $adf = cbf$, $cfb = edb$ und daher $adf = edb$, woraus $af = eb$ bzw. $(a, b) \approx (e, f)$ folgt, weil $d \neq 0$ ist. $\square$

In diesem Beweis wurde nur mit ganzen Zahlen gerechnet und keine Division verwenden, denn diese ist in $\mathbb{Z}$ im Allgemeinen nicht durchführbar.

Definition 1.1.8. Die *Menge der rationalen Zahlen* ist

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\approx .$$

Statt $[(a, b)]$ schreiben wir auch $\frac{a}{b}$. Es ist $(1, 2) \neq (3, 6)$ aber $[(1, 2)] = [(3, 6)]$ und somit $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

Übungsaufgabe 1.1.9 (Übungsaufgabe 1). Rationale Zahlen sind als Äquivalenzklassen auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ mit $(a, b) \approx (c, d) :\iff ad = bc$ definiert worden. Ist diese Relation auch eine Äquivalenzrelation auf (a) $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$, (b) auf $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ und (c) auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Argumentieren Sie im Fall einer positiven Antwort, warum der Beweis wie bei der Konstruktion der rationalen Zahlen funktioniert. Zeigen Sie im Fall einer negativen Antwort durch ein Zahlenbeispiel, welches der Axiome einer Äquivalenzrelation verletzt ist.

ÜBUNGSAUFGABE 1.1.10 (Übungsaufgabe 2).
Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ werden weitere Relationen definiert:

$$(a,b) \sim_1 (c,d) :\iff ac = bd \quad \text{und} \quad (a,b) \sim_2 (c,d) :\iff a^2 d = c^2 b.$$

Zeigen Sie, dass $\sim_1$ keine Äquivalenzrelation ist und beweisen Sie, dass $\sim_2$ eine Äquivalenzrelation ist.

ÜBUNGSAUFGABE 1.1.11 (Übungsaufgabe 3). Interpretieren Sie die Äquivalenzklassen (a) bei der Konstruktion der ganzen Zahlen, (b) bei der Konstruktion der rationalen Zahlen und (c) jene der Relation $\sim_2$ aus der vorangegangenen Aufgabe geometrisch als Teilmenge der Ebene. Diese Relationen lassen sich auch auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ (oder $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$) betrachten, was die geometrische Interpretation vereinfacht. Sie können die Äquivalenzklassen auch mit Geogebra unter Verwendung eines Schiebereglers mit Darstellung der Spur visualisieren.

(d) Finden Sie ausgehend von der geometrischen Interpretation weitere Äquivalenzrelationen dieser Art auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ oder $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

1.2. Algebraische Eigenschaften von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Der Inhalt dieses Kapitel ist weitgehend Stoff der StEOP.

DEFINITION 1.2.1. Ein *Gruppoid* $(G, \circ)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$.

Statt $\circ(a,b)$ wird oft $a \circ b$ geschrieben. Beispiele von Gruppoiden sind $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},-)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Z}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q},-)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q}^*,:)$.

SCHULMATHEMATIK UND ANSCHAUUNG 1.2.2 (Abgeschlossenheit von Zahlenbereichen in der Schulmathematik). In der Schulmathematik wird davon gesprochen, dass ein Zahlenbereich abgeschlossen bzgl. einer Rechnungsart ist. Eine für Schule brauchbare Definition dafür könnte lauten: *Ein Zahlenbereich ist abgeschlossen bezüglich einer Rechnugsart, wenn die Ergebnisse aller solcher Rechnungen wieder in diesem Zahlenbereich liegen.* Die natürlichen Zahlen sind abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation, die ganzen Zahlen sind zusätzlich noch abgeschlossen bezüglich der Subtraktion. Die rationalen, reellen und komplexen Zahlen sind ebenfalls abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation und ohne die Null außerdem noch abgeschlossen bezüglich der Division.

Diese Abgeschlossenheit ist gleichbedeutend damit, dass die Zahlenmenge mit der entsprechenden Verknüpfung ein Gruppoid ist.

DEFINITION 1.2.3. Eine *Gruppe* $(G, \circ)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ für die folgendes erfüllt ist:

(1) Es existiert ein $e \in G$ mit $e \circ x = x \circ e = x$ für alle $x \in G$. (Neutrales Element)

(2) Für alle $x \in G$ gibt es ein $x^{-1} \in G$ mit $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$. (Inverse Elemente)
(3) Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. (Assoziativität)

Gilt für eine Gruppe $(G, \circ)$ zusätzlich noch $x \circ y = y \circ x$ für alle $x, y \in G$, so nennt man die Gruppe *kommutativ* (oder *abelsch*).

Es gib immer nur ein neutrales Element und zu jedem Element immer nur ein inverses Elemente. Diese Eindeutigkeit zu beweisen, ist Stoff der StEOP.

Kommutative Gruppen sind beispielsweise $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ und $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ oder alle (endlichen) Restklassenringe mit der Addition. Die Zahlenmengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden wir erst in den Kapiteln 1.8 und 1.9 konstruieren. In diesen Zahlenbereichen sind nur Addition und und Multiplikation sinnvolle Kandidaten für Gruppenoperationen, weil Subtraktion und Division nicht assoziativ sind. Beispiele nicht kommutativer Gruppen sind Symmetriegruppen von einfachen geometrischen Objekten wie Dreiecke und andere Vielecke mit Spiegelungen, Körper (auch ohne Spiegelungen) wie Würfel usw.

Schulmathematik und Anschauung 1.2.4 (Gruppen und Assoziativgesetz). Eine Gruppe ist eine Menge mit einer Verknüpfung, die Rückgängig gemacht werden kann.

Assoziativität, bedeutet nichts anderes, als dass klar ist, was mit $x \circ y \circ z$ gemeint ist. Insbesondere ist das hintereinander Ausführen (d.h. Verketten) von Funktionen assoziativ.

Definition 1.2.5. Ein *Körper* $(K, \oplus, \odot)$ ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $\oplus$ (*Addition*) und $\odot$ (*Multiplikation*) auf der Menge K, wenn folgendes gilt:

(1) $(K, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $\mathbf{0}$.
(2) $(K \backslash \{\mathbf{0}\}, \odot)$ ist eine kommutative Gruppe und $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$ für alle $x \in K$.
(3) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ (Distributivgesetz).

Das neutrale Element $\mathbf{0}$ von $(K, \oplus)$ heiß *Nullelement*, das neutrale Element von $(K \setminus \{\mathbf{0}\}, \odot)$ wird mit $\mathbf{1}$ bezeichnet und heißt *Einselement*. Das inverse Element von x bezüglich der Addition wird mit $-x$ und jenes der Multiplikation mit x^{-1} bezeichnet.

Die *Subtraktion* ist die Addition des bzgl. $\oplus$ inversen Elements $(\oplus - x)$, die *Division* ist die Multiplikation des bzgl. $\odot$ inversen Elements $(\odot x^{-1})$. In Körpern gilt die notationelle Übereinkunft "Punkt vor Strich", d.h. wir schreiben $x \odot y \oplus z$ statt $(x \odot y) \oplus z$. Beispiele von Körpern sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sowie die Restklassenringe $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ wenn p eine Primzahl ist.

Schulmathematik und Anschauung 1.2.6 (Körper). In einem Körper können die vier Grundrechnungsarten durchgeführt werden, mit der Einschränkung, dass nicht durch Null dividiert werden darf.

Das Distributivgesetz bedeutet, dass Addition und Multiplikation miteinander harmonieren, also nicht völlig unabhängig voneinander definiert sind. In einem Körper, der die natürlichen Zahlen enthält, stellt das Distributivgesetz sicher, dass die Multiplikation mit einer ganzen Zahl der fortgesetzten Addition entspricht. Z.B. ist $2 \cdot x = (1 + 1) \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = x + x$.

Auch andere Körper sind mit ihrer Addition, ihrer Multiplikation und ihrer Kommutativität in ihrem Wesen mit herkömmlichen Zahlenmengen verwandt. Gruppen hingegen können, wenn sie nicht kommutativ sind, ausgesprochen komplex und völlig anders geartet sein, als die herkömmlichen Zahlenbereiche. Viele Gruppenverknüpfungen haben weder mit einer Addition noch einer Multiplikation auf irgendeine Weise ein Naheverhältnis. Daher werden für allgemeine Gruppenverknüpfungen die Symbole $\oplus$ und $\odot$ nicht verwendet.

Definition 1.2.7. Ein *Ring* $(R, \oplus, \odot)$ hat alle Eigenschaften eines Körpers, jedoch muss die Multiplikation nicht kommutativ sein, es muss keine multiplikativen inversen Elemente und kein Einselement geben.

Insbesondere ist im Allgemeinen für Ringe $(R \setminus \{n\}, \odot)$ keine Gruppe. Wir zeigen nun ein paar elementare Eigenschaften, die in allen Körpern gelten. Diese werden wir in Kapitel 1.10 benötigen, um zu zeigen, dass es keine Ordnung gibt, die die komplexen Zahlen zu einem geordneten Körper machen kann. Rechengesetze in $\mathbb{R}$ müssen grundsätzlich aus einer Konstruktion abgeleitet werden.

Satz 1.2.8. *In einem Körper $(K, \oplus, \odot)$ mit Nullelement $\mathbf{0}$ und Einselement $\mathbf{1}$ gilt: $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ und $-x = x \odot (-\mathbf{1})$ für alle $x \in K$.*

Beweis. Das Element, das zu $\mathbf{0}$ addiert $\mathbf{0}$ ergibt, ist $\mathbf{0}$. Also ist $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$$x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0} \iff x \odot \mathbf{0} \oplus x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus x \odot \mathbf{0} \iff$$
$$x \odot (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) = x \odot \mathbf{0} \iff x \odot \mathbf{0} = x \odot \mathbf{0}.$$

Letzteres ist eine wahre Aussage, also ist $x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$$-x = x \odot (-\mathbf{1}) \iff -x \oplus x = x \odot (-\mathbf{1}) \oplus x \iff$$
$$\mathbf{0} = x \odot (-\mathbf{1}) \oplus x \odot \mathbf{1} \iff \mathbf{0} = x \odot (-\mathbf{1} + \mathbf{1}) \iff \mathbf{0} = x \odot \mathbf{0}.$$

Dies haben wir zuvor gezeigt, also ist $-x = (-\mathbf{1}) \odot x$. □

Satz 1.2.9 (Produkt-Null-Satz). *In einem Körper gilt: Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.*

Formaler: In einem Körper $(K, \oplus, \odot)$ mit Nullelement $\mathbf{0}$ gilt für alle x, y:

$$x \odot y = \mathbf{0} \iff x = \mathbf{0} \text{ oder } y = \mathbf{0}.$$

Beweis. Angenommen es ist $x \odot y = \mathbf{0}$. Wenn $y \neq \mathbf{0}$ ist, existiert y^{-1} und es folgt

$$x \odot y \odot y^{-1} = \mathbf{0} \odot y^{-1} \implies x = \mathbf{0}.$$

Wenn $x \neq \mathbf{0}$ folgt analog $y = \mathbf{0}$. Somit ist zumindest einer der Faktoren gleich $\mathbf{0}$ und die Implikation "$\Rightarrow$" bewiesen.

Wenn $x = \mathbf{0}$ oder $y = \mathbf{0}$ ist, folgt nach Satz 1.2.8, dass $x \odot y = \mathbf{0}$ ist. □

Der Produkt-Null-Satz ist in Ringen im Allgemeinen nicht richtig. Im Restklassenring $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ ist $[0]$ das Nullelement und $[2] \cdot [2] = [0]$. In Ringen nennt man Paare von Elementen die ungleich dem Nullelement sind, deren Produkt aber das Nullelement ist, ein Paar von *Nullteilern*.

Schulmathematik und Anschauung 1.2.10 (Produkt-Null-Satz). In der Schulmathematik wird der Produkt-Null-Satz zum Beispiel beim Lösen von Polynomgleichungen verwendet. Beispielsweise ist $x^3 - 4x = 0$ äquivalent zu $x(x-2)(x+2) = 0$ und hat nach dem Produkt-Nullsatz-Satz, der für jede endliche Anzahl von Faktoren gilt, die Lösungen 0, 2 und -2.

1.3. Folgen

Definition 1.3.1. Eine *Funktion* f von einer Menge A in eine Menge B ist eine Tripel (A, B, G) mit einer Relation $G \subset A \times B$ sodass es für alle $x \in A$ genau ein $f(x) \in B$ mit $(x, f(x)) \in G$ gibt. Die Relation G heißt *Graph* von f, A ist die Definitionsmenge, B die Zielmenge und $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ ist die Wertemenge.

Eine Funktion f kann alternativ auch direkt als Relation definiert werden, dann ist $f \subset A \times B$ und somit f sowohl Funktion als auch Graph und es ist $(x, f(x)) \in f$. In diesem Fall sind Funktion und Graph identisch und es muss der Wertebereich gesondert angeführt werden, wenn Surjektivität und Bijektivität definiert werden, bzw. ist die Funktion dann surjektiv oder bijektiv bezüglich einer Wertemenge.

Definition 1.3.2. Eine *Folge* in einer Menge M ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$. Sie wird in der Form $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder x_0, x_1, $x_2, \ldots$ angeschrieben, wobei $x_n = f(n)$ ist. Das *n-te Folgenglied* ist x_n und n ist der *Index* von x_n. Ist klar, dass die Folge den Index n hat und dieser $\mathbb{N}$ durchläuft, kann kurz (x_n) statt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben werden. Mit $(x_n)_{n\geq k}$ ist eine Folge x_k, x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots$ gemeint.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *konstant*, wenn $x_m = x_n$ für alle m und n ist. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine Eigenschaft *ab der N-ten Stelle* (oder *ab dem Index* N) hat, wenn die Folge

$$(x_n)_{n\geq N} = x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$$

diese Eigenschaft besitzt, oder wenn die einzelnen Elemente x_n für $n \geq N$ diese Eigenschaft haben. Eine Folge hat eine Eigenschaft *ab einer Stelle*, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass die Folge die Eigenschaft ab der Stelle N hat.

Mit *fast allen* Elementen einer Menge sind immer all bis auf endlich viele Elemente gemeint. Eine Folge hat also eine Eigenschaft genau dann ab einer Stelle, wenn fast alle Glieder der Folge diese Eigenschaft haben.

Wenn x_0 gegeben ist (oder mehrere Folgenglieder) und x_n durch eine Formel in Abhängigkeit von vorangegangenen Folgengliedern dargestellt werden kann, heißt eine solche Darstellung der Folge *rekursiv*.

Beispiel 1.3.3.

1. Für $M = \{\text{Đ}, 7, \heartsuit, *\}$ ist $f : \mathbb{N} \to M$ mit

$$f(n) = \begin{cases} \text{Đ} & n = 0, 1 \\ \heartsuit & n \geq 2 \end{cases}$$

eine Folge in M. Gliedweise angeschrieben ergibt das

$$\text{Đ}, \text{Đ}, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \ldots$$

Diese Folge ist ab der 3. Stelle konstant.

2. Es ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f : n \mapsto 2n - 3$ eine Folge in $\mathbb{Z}$. Die alternative Schreibweise ist $(2n-3)_{n\in\mathbb{N}}$. Gliedweise angeschrieben ist diese Folge
$$-3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots$$
In rekursiver Darstellung $x_0 = -3$ und $x_{n+1} = x_n + 2$.
3. Die Folge $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ mit $f : n \mapsto \frac{(-1)^n}{3n}$ ist in den anderen Schreibweisen $\left(\frac{(-1)^n}{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots$
Rekursiv: $x_1 = -\frac{1}{3}$ und $x_{n+1} = -x_n \frac{n}{n+1}$.

Schulmathematik und Anschauung 1.3.4 (Graphische Darstellung von Folgen, die durch Funktionen rekursiv definiert sind).

Wenn eine (reelle) Funktion f die Gleichung $f(x_n) = x_{n+1}$ erfüllt, kann eine graphische Darstellung helfen, das Verhalten der Folge (x_n) zu verstehen. Vom Startwert x_0 auf der x-Achse wird eine senkrechte Linie zum Graphen der Funktion gezeichnet, von dort wird eine waagrechte Linie zur ersten Mediane (Gerade mit Gleichung $y = x$) gezogen. Von hier wird eine senkrechte Linie zum Graphen der Funktion, dann wieder eine waagrechte Linie zur ersten Mediane, dann eine senkrechte zum Graphen usw. Die x-Koordinaten der so konstruierten Schnittpunkte sind die Folgenglieder. Manchmal nähert sich dieser Streckenzug einem Schnittpunkt von Graphen und erster Mediane, die Folge nähert sich dann einem Fixpunkt der Funktion, also einem Wert x_F mit $f(x_F) = x_F$.

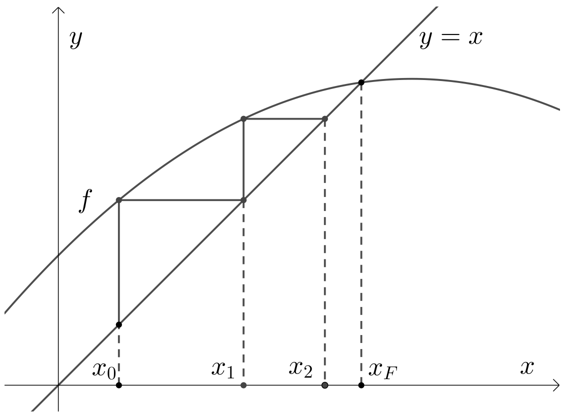

Abbildung 1. Durch Funktion rekursiv definierte Folge

Definition 1.3.5. Ein rationale Folge heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn es eine rationale Zahl c gibt, sodass $x_n \le c$ (bzw. $c \le x_n$) für alle n in $\mathbb{N}$ ist. Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton steigend* (bzw. *monoton fallend*) wenn $x_n \le x_{n+1}$ (bzw. $x_n \ge x_{n+1}$) ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge, die entweder monoton steigend oder monoton fallend ist, heißt *monoton.* Gilt $<$ statt $\le$ oder $>$ statt $\ge$, nennen wir die Folge *streng* monoton.

Für eine *(Vorzeichen-)alternierende Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt entweder $x_{2n} > 0$ und $x_{2n+1} < 0$ für alle n oder $x_{2n} < 0$ und $x_{2n+1} > 0$.

Für die erste Folge in Beispiel 1.3.3 macht es keinen Sinn, nach Monotonie oder Beschränktheit zu fragen. Die zweite Folge ist streng monoton steigend, sie ist nach unten, jedoch nicht nach oben beschränkt. Die dritte Folge ist alternierend, beschränkt und nicht monoton.

Folgen werden sowohl als Abbildung als auch als Menge ihrer Bildpunkte betrachtet, also ohne die Indices der Folgenglieder zu berücksichtigen. Zum Beispiel sagen wir "Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $[0,1]$ enthalten" wobei die Folge als Abbildung ja keine Teilmenge des Einheitsintervalls $[0,1]$ ist, sondern die Menge ihrer Bildpunkte

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

in $[0,1]$ enthalten ist. Diese Ungenauigkeit in der Terminologie akzeptieren wir, solange dadurch keine Missverständnisse entstehen.

Übungsaufgabe 1.3.6 (Übungsaufgabe 4). Finden Sie rekursive Darstellungen (mit Anfangsbedingung) und explizite Darstellungen der Folgen

a) $5, 7, 9, 11, 13, 15 \dots$

b) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$

c) $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

Übungsaufgabe 1.3.7 (Übungsaufgabe 5). Ist die Folge (x_n) mit

$$x_n = \frac{n-1}{n^2+2}$$

ab einer Stelle monoton oder alternierend? Wenn ja, ab welcher Stelle? Ist die Folge beschränkt? Hinweis: Berechnen Sie die ersten Glieder der Folge, leiten Sie daraus Vermutungen ab und beweisen Sie diese Vermutungen dann. Dies gelingt ohne Induktion mit einer quadratischen Ungleichung.

Übungsaufgabe 1.3.8 (Übungsaufgabe 6). Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Es sei

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Folgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Hinweis: Leiten Sie aus Berechnungen eine Vermutung ab. Beweisen Sie diese z.B. indem sie die Rekursionsgleichung im Zähler der Folgenglieder anwenden, woraus $x_n = 1 + 1/x_{n-1}$ folgt. Damit lässt sich x_n durch x_{n-2} ausdrücken. Ob in dieser Ungleichung stets $<$ oder $>$ gilt, bestimmen die Startwerte der Folgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ bzw. $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Sollten Sie bereits etwas über Konvergenz von Folgen wissen: Das werden wir auch für diese Folge zu einem späteren Zeitpunkt in 1.17.8 (Übungsaufgabe 31) behandeln.

Übungsaufgabe 1.3.9 (Übungsaufgabe 7). Eine rationale Folge ist rekursiv gegeben durch $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$.

a) Für welche Werte von x_0 ist diese Folge monoton steigend, monoton fallend, konstant bzw. beschränkt? Interpretieren Sie das Verhalten der Folge in einer Skizze wie in 1.3.4 und beweisen Sie Ihre Antworten rechnerisch.

b) Bestimmen Sie x_n explizit (nur in Abhängigkeit von x_0).

ÜBUNGSAUFGABE 1.3.10 (Übungsaufgabe 8). Wie Übungsaufgabe 1.3.9, jedoch mit $x_{n+1} = -2x_n + 1$.

ÜBUNGSAUFGABE 1.3.11 (Übungsaufgabe 9). Wie Aufgabe 1.3.9, jedoch mit $x_{n+1} = kx_n + d$ für beliebige k und d. Für welche Werte von k und d konvergiert die Folge und wohin?

1.4. Cauchy-Folgen und konvergente Folgen in $\mathbb{Q}$

DEFINITION 1.4.1. Eine Folge rationaler Zahlen ist eine *Cauchy-Folge*, wenn für alle rationalen $\varepsilon > 0$ ab einer Stelle die Abstände der Folgenglieder zueinander kleiner als ε sind.

Formal: Es ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Cauchy-Folge*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|x_m - x_n| < \varepsilon$ ist für alle n, m mit $n, m \geq N$.

BEISPIEL 1.4.2. Wir zeigen, dass $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{2}{N} < \varepsilon$ ist. Denn dann gilt für alle n, m mit $n, m \geq N$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon \quad \text{und somit} \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

DEFINITION 1.4.3. Ein *offenes rationales Intervall* ist eine Menge der Form

$$(a; b)_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}.$$

Ein *abgeschlossens rationales Intervall* ist

$$[a; b]_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \leq b\}.$$

SATZ 1.4.4. *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*

BEWEIS. Wenn (x_n) eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein N, sodass $|x_m - x_n| < 1$ für alle $m, n \geq N$. Insbesondere ist $|x_m - x_N| < 1$ für alle $m \geq N$. Daraus folgt, dass die ganze Folge in der beschränkten Menge

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\} \cup (x_N - 1; x_N + 1)_{\mathbb{Q}}$$

enthalten und somit selbst beschränkt ist. □

BEISPIEL 1.4.5. Nicht jede beschränkte Folge ist eine Cauchy-Folge. Die Folge $((-1)^n) = 1, -1, 1, -1, \ldots$ ist beschränkt, aber keine Cauchy-Folge, denn für jedes positive $\varepsilon < 2$ gibt es kein geeignetes N im Sinne der Definition.

SATZ 1.4.6. *Jede beschränkte monotone Folge ist eine Cauchy-Folge.*

BEWEIS. Wir nehmen an, die Folge sei monoton steigend und nach oben beschränkt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei a_k die kleinste ganze Zahl, sodass $a_k/2^k$ größer oder gleich allen Folgengliedern ist. Ab einer Stelle müssen die Folgenglieder also größer als $(a_k - 1)/2^k$ sein. Ab dieser Stelle liegen alle Folgenglieder im Intervall $((a_k - 1)/2^k; a_k/2^k]_{\mathbb{Q}}$. Die Länge dieses Intervalls ist $1/2^k$ und ab der erwähnten Stelle haben die Folgenglieder paarweise zueinander einen Abstand, der kleiner als $1/2^k$ ist. Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es für jede beliebig kleine $\varepsilon > 0$ eine Stelle, ab der die Folgenglieder zueinander Abstände haben, die alle kleiner als ε sind. Das heißt, die Folge ist eine Cauchy-Folge.

Für monoton fallende Folgen, die nach unten beschränkt sind, geht der Beweis analog. □

Jedes offene rationale Intervall ist in $\mathbb{Q}$ Umgebung jedes seiner Elemente.

DEFINITION 1.4.7 (Topologische Definition der Konvergenz einer Folge). Eine *Umgebung in* $\mathbb{Q}$ einer Zahl x in $\mathbb{Q}$ ist eine Menge $U \subset \mathbb{Q}$, für die es ein offenes rationales Intervall I gibt, sodass $x \in I \subset U$ gilt. Eine Folge *konvergiert gegen* x, wenn sie in jeder Umgebung von x ab einer Stelle enthalten ist. So ein Punkt heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge.

Wenn x Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

oder wenn klar ist, welcher der Index ist, dann auch $\lim x_n = x$. Wenn wir $\lim x_n = x$ schreiben, ohne das weiter zu kommentieren, dann sind damit zwei Aussagen gemeint: Erstens, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und zweitens, dass ihr Grenzwert x ist.

Man kann auch sagen, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *geht gegen* x oder *strebt gegen* x. Folgen, die nicht konvergent sind, heißen *divergent*.

Die Folge, der Grenzwert und die Umgebungen müssen in einer vorher festgelegten Grundmenge liegen. Was unter einer offenen Menge zu verstehen ist, hängt von der Grundmenge ab. In $\mathbb{Q}$ können Umgebungen wie in Definition 1.4.3 mit offenen Intervallen bestehend aus rationalen Zahlen definiert werden, in $\mathbb{R}$ werden reelle Intervalle und in der Ebene offene Kreisscheiben (ohne Rand) für die Definition von Umgebungen verwendet. Wenn die Grundmenge aus einem Teil der rationalen oder reellen Zahlen besteht oder aus einem Teil der Ebene, werden auch die Umgebungen entsprechend eingeschränkt. Wenn beispielsweise in $\mathbb{R}$ eine Funktion nur auf $[0;1]$ definiert ist und somit $[0;1]$ die Grundmenge ist, dann sind Umgebungen von 0 jene Menge, die ein Intervall $[0;\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ enthalten. Wenn U eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$ ist, dann ist $U \cap [0;1]$ eine Umgebung von 0 in der Grundmenge $[0;1]$. Man nennt dies auch Umgebungen in der *Spurtopologie* oder *Teilmengentopologie*. Mehr zu dem Thema ab Kapitel 1.11.

Verbreitet in der Literatur ist folgende Definition, die äquivalent zu Definition 1.4.7 ist.

DEFINITION 1.4.8 (ε-Definition der Konvergenz einer Folge). Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen *konvergiert gegen* $x \in \mathbb{Q}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

SATZ 1.4.9. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

BEWEIS. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\lim x_n = x$. Ab einer Stelle liegt die Folge in $(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2)$. Daher gilt $|x_m - x_n| < \varepsilon$ ab dieser Stelle und die Folge ist eine Cauchy-Folge. □

KOROLLAR 1.4.10. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz 1.4.11. *Eine Folge rationaler Zahlen hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Hätte eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene Grenzwerte a und b, wobei a die größere der beiden Zahlen bezeichnet, dann wären

$$\left(b-\frac{a-b}{2}, b+\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(a-\frac{a-b}{2}, a+\frac{a-b}{2}\right)$$

zwei disjunkte Umgebungen dieser Grenzwerte; siehe Abbildung 2. Eine Folge kann aber nicht ab einer Stelle in einer Menge und zugleich ab einer Stelle in einer dazu disjunkten Menge liegen. □

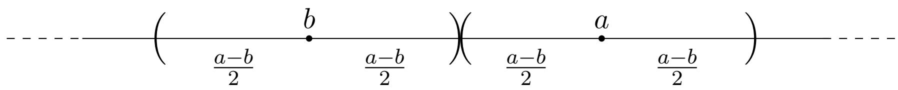

Abbildung 2. Eindeutigkeit des Grenzwerts

Definition 1.4.12. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Beispiel 1.4.13 (Konvergente rationale Folgen).
(1) Eine Folge, die ab einer Stelle konstant ist, ist konvergent.
(2) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge.
(3) Die Folge $(x_n)_{n\geq 2}$ mit $x_n = \frac{n^2}{n^2-1}$ konvergiert gegen 1.

Beweis. Die Aussagen (1) und (2) folgen unmittelbar aus der Definition. Um (3) zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und bestimmen eine Stelle n_0, ab der $|x_n - 1|$ kleiner als ε ist:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2-n^2+1}{n^2-1}\right| = \frac{1}{n^2-1} < \varepsilon \iff \varepsilon^{-1} < n^2-1 \iff \varepsilon^{-1}+1 < n^2.$$

Wenn $n_0 > \varepsilon^{-1} + 1$ ist, dann ist auch $n_0^2 > \varepsilon^{-1} + 1$. Für alle $n > n_0$ gilt das selbe und somit nach der obigen Äquivalenz auch $|x_n - 1| < \varepsilon$. Also ist $\lim x_n = 1$. □

Übungsaufgabe 1.4.14 (Übungsaufgabe 10).
Es sei (x_n) ein reelle Folge und $\lim x_n = x$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0, \text{ sodass } \forall n \geq n_0 : \; |x_n - x| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass sich aus den folgenden Aussagen die Konvergenz von (x_n) ableiten lässt, oder geben Sie ein Gegenbeispiel mit Begründung an, wenn dies nicht der Fall ist.

(1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0, \text{ sodass } \forall n \geq n_0 : \; |x_n - x| \leq \varepsilon$
(2) $\forall \varepsilon \geq 0 \;\; \exists n_0, \text{ sodass } \forall n \geq n_0 : \; |x_n - x| < \varepsilon$
(3) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0, \text{ sodass } \exists n \geq n_0 : \; |x_n - x| < \varepsilon$
(4) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall n_0, \text{ gilt: } \forall n \geq n_0 : \; |x_n - x| < \varepsilon$
(5) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0, \text{ sodass } \forall n \geq n_0 : \; |x_n - x| < \varepsilon/2$

Übungsaufgabe 1.4.15 (Übungsaufgabe 11). Für $x_n = \frac{n}{n^2+2}$ ist $\lim x_n = 0$. Bestimmen Sie für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass $x_n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Hinweis: Ein solches n_0 lässt sich durch eine einfache Abschätzung auch ohne Lösen einer quadratischen Gleichung finden.

ÜBUNGSAUFGABE 1.4.16 (Übungsaufgabe 12). Für $x_n = \frac{2n^2}{n^2+3}$ ist $\lim x_n = 2$. Bestimmen Sie für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass $|x_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, ohne dabei Wurzeln zu verwenden. Wir haben zum gegenwärtigen Zeitpunkt weder reelle Zahlen noch Wurzeln zur Verfügung.

ÜBUNGSAUFGABE 1.4.17 (Übungsaufgabe 13). Für zwei rationale Folgen sei $\lim x_n = x$ und $\lim y_n = y$. Sind folgende Aussage immer richtig? Beweisen Sie die Aussagen, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Wenn $x_n \leq y_n$ für alle n, dann ist auch $x \leq y$.
b) Wenn $x_n < y_n$ für alle n, dann ist auch $x < y$.

1.5. Wurzeln in $\mathbb{Q}$ und eine Cauchy-Folge, die nicht konvergiert

In der StEOP und in Schulbüchern wird gezeigt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist bzw. dass es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist. Allgemein gilt folgender Satz:

SATZ 1.5.1. *Es seien n und k aus $\mathbb{N}_{n\geq 2}$. Entweder ist n eine k-te Potenz einer anderen natürlichen Zahl, oder es gibt keine rationale Zahl deren k-te Potenz n ist.*

BEWEIS. Angenommen n ist k-te Potenz einer anderen natürlichen Zahl ist.

Es sei m die größte natürliche Zahl mit $m^k \mid n$. Dann ist $n = lm^k$ für ein natürliches $l \geq 2$, wobei l keine k-Potenz einer natürlichen Zahl größer gleich 2 als Teiler hat.

Wir treffen die indirekte Annahme, dass es eine rationale Zahl gibt, deren k-te Potenz n ist. Wenn das so ist, dann gilt dies auch für l und es gibt einen gekürzten Bruch $a/b \in \mathbb{Q}$ mit $(a/b)^k = l$. Es sei p eine Primzahl, die l teilt. Wegen $a^k = lb^k$, muss p auch a^k teilen. Weil p eine Primzahl ist, teil p auch a. Folglich ist p^k ein Teiler von a^k. Da p^k kein Teiler von l ist, muss p ein Teiler von b^k sein. Weil p eine Primzahl ist, teil p auch b. Folglich ist a/b kein gekürzter Bruch, was im Widerspruch zur Wahl von a/b steht. Also gibt es keine rationale Zahl, deren k-te Potenz n ist. □

BEISPIEL 1.5.2. Wir definieren $x_n := a_n/2^n$, wobei a_n die größte natürliche Zahl ist, für die $(a_n/2^n)^2 < 2$ ist. Die ersten Glieder der Folge sind

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots$$

Es ist zum Beispiel

$$\left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{121}{64} < 2 < \left(\frac{12}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Die Folge (x_n) ist nach oben beschränkt, und zwar durch jede Zahl, deren Quadrat größer als 2 ist. Die Folge ist außerdem monoton steigend, denn wegen $x_n = a_n/2^n = 2a_n/2^{n+1}$ (und weil die Quadrate dieser Terme alle kleiner als 2 sind) ist $2a_n \leq a_{n+1}$, d.h. $x_n \leq x_{n+1}$.

Also ist (x_n) monoton und beschränkt und somit nach Satz 1.4.6 eine Cauchy-Folge. Sie ist aber nicht konvergent, weil das Quadrat des Grenzwerts gleich 2 sein müsste. Eine solche Zahl gibt es aber nach Satz 1.5.1 nicht.

Wäre die Folge durch $x_n := a_n/2^n$ definiert worden, dann wären die ersten Folgenglieder
$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \ldots$$
und die Folge wäre nicht monoton steigend, denn
$$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}.$$

1.6. Ungleichung von Bernoulli und geometrische Folgen

Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{N}$ ergeben sich aus der Definition der Multiplikation, wobei $n^0 = 1$ definiert wird für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist auch $0^0 = 1$.

Satz 1.6.1 (Ungleichung von Bernoulli).
Wenn $x \in \mathbb{Q}$, $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}$, dann ist
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Es sei $A(n)$ die Aussage der Ungleichung von Bernoulli für $n \in \mathbb{N}$. Die Aussage $A(0)$ ist $1 \geq 1$ und somit wahr. Angenommen $A(n)$ ist wahr, dann folgt $A(n+1)$:
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{A(n)}{\geq} (1+nx)(1+x)\\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$
Womit die Ungleichung durch vollständige Induktion bewiesen ist. Beachten Sie, dass bei der Ungleichheit, bei der $A(n)$ eingegangen ist, verwendet wurde, dass $1 + x \geq 0$ d.h. $x \geq -1$ ist. Wäre $1 + x$ negativ, würde sich hier das Ungleichheitszeichen umkehren. □

Schulmathematik und Anschauung 1.6.2 (Visualisierung Ungleichung von Bernoulli). Die Ungleichung von Bernoulli kann mit Geogebra visualisiert werden. Erstellen Sie dazu einen Schieberegler für n mit Sprungweite 1 und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = (1+x)^n$ und $g(x) = 1+nx$. Dass diese Ungleichung auch für nicht ganzzahlige Werte von n gilt, wird erst in *** gezeigt.

Definition 1.6.3. Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *geometrische Folge*.

Satz 1.6.4 (Geometrische Folge). *Für $|q| < 1$ ist $\lim q^n = 0$, für $q = 1$ ist $\lim q^n = 1$. Für alle anderen Werte von q divergiert die geometrische Folge.*

Beweis. Wenn $q = 1$ oder $q = 0$, dann ist die Folge konstant, und wenn $q = -1$, dann ist die Folge alternierend $1, -1, 1, -1, \ldots$ und somit divergent.

Für $q \neq 0$ sei $x = \frac{1}{|q|} - 1$, also $|q| = \frac{1}{1+x}$. Wegen $|q| < 1$ ist $x > 0$. Nach der Ungleichung von Bernoulli (Satz 1.6.1) gilt
$$|q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine beliebig kleine Umgebung von 0. Die Ungleichung
$$\frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

ist äquivalent zu

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} < n.$$

Für alle $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}$ ist also

$$|q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \varepsilon.$$

Daher liegt die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ab einer Stelle in $(-\varepsilon, \varepsilon)$, was zu zeigen war.

Wenn $|q| > 1$ ist sei x so, dass $|q| = 1 + x$ ist. Wieder nach Ungleichung von Bernoulli ist

$$|q|^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Daher ist die Folge $(|q|^n)$ nicht beschränkt, des selbe gilt für (q^n). Da jede konvergente Folge beschränkt ist (Korollar 1.12.5), also ist (q^n) für $|q| > 1$ divergent. □

Übungsaufgabe 1.6.5 (Übungsaufgabe 14). Für welche n kann in der Ungleichung von Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$ auf die Voraussetzung $x > -1$ verzichtet werden? Für welche x gilt die Ungleichung von Bernoulli im Fall $n = 3$?

Übungsaufgabe 1.6.6 (Übungsaufgabe 15). Es sei

$$x_n = \frac{n + (-1)^n}{n+1}$$

und

$$U_i = \left(1 - \frac{1}{10^i}, 1 + \frac{1}{10^i}\right).$$

Finden Sie für $i = 1, 2, 3$ jeweils ein $N(i)$, sodass $x_n \in U_i$ für alle $n \geq N(i)$. Anmerkung: Die $N(i)$ müssen nicht minimal gewählt werden.

Übungsaufgabe 1.6.7 (Übungsaufgabe 16). Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) mit

$$x_n = \left(1 - \frac{28}{n^2}\right)^n$$

gegen 1 konvergiert, indem Sie mit Ihren Argumenten von der Definition der Konvergenz ausgehen. Hinweis: Bernoulli-Ungleichung für genügend große n.

1.7. Geometrische Reihe

Definition 1.7.1. Eine *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist definiert als Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ heißt *geometrische Reihe*.

Wir schreiben $\sum$ statt $\sum_{k=0}^{\infty}$, $\sum_{n=0}^{\infty}$, $\sum_{i=0}^{\infty}$ usw., wenn klar ist, was der Summationsindex ist und der Index von 0 weg läuft. Wenn die Reihe $\sum a_k$ konvergiert, bezeichnen wir mit $\sum a_k$ auch gleichzeitig ihren Grenzwert, sofern das nicht zu Missverständnissen führt.

SATZ 1.7.2. *Für alle $q \neq 1$ ist*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Wenn $|q| < 1$ ist, konvergiert die geometrische Reihe $\sum q^n$ gegen $\frac{1}{1-q}$, anderenfalls divergiert sie.

BEWEIS. Die Formel für die endliche geometrische Summe folgt aus

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n}(q^k - q^k) - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

Die geometrische Reihe $\sum q^k$ ist nach Definition 1.7.1 die Folge

$$\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Nach Satz 1.6.4 konvergiert die Folge (q^{n+1}) gegen 0, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall konvergiert die geometrische Reihe also gegen $\frac{1}{1-q}$. Für $q = 1$ ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$ und die geometrische Reihe daher divergent. Für $q = -1$ und für $|q| > 1$ divergiert die geometrische Folge und somit auch die geometrische Reihe. □

ÜBUNGSAUFGABE 1.7.3 (Übungsaufgabe 17). Die Geschichte vom Wettrennen zwischen Achilles und der Schildkröte stammt von Zenon von Elea. Da die Schildröte langsamer ist, bekommt sie einen Vorsprung. Wenn Achilles an die Stelle kommt, von der aus die Schildkröte gestartet ist, ist die Schildkröte bereits ein Stück weiter gelaufen. Wenn Achilles an die Stelle kommt, an der die Schildkröte nun ist, ist sie inzwischen allerdings schon wieder wieder ein Stück weiter gelaufen und so fort. Auf diese Weise kann Achilles die Schildkröte nie einholen, obwohl er viel schneller läuft. Wo liegt dabei der Denkfehler?

Achilles ist ein guter Läufer und schafft 20 km/h. Die Schildkröte braucht für einen Kilometer jedoch eine ganze Stunde. Sie bekommt 190 m Vorsprung. Wie weit muss Achilles laufen, bis er die Schildkröte überholt und wie lange dauert das?

ÜBUNGSAUFGABE 1.7.4 (Übungsaufgabe 18). Eine Unternehmerin erhält einen Kredit in der Höhe K GE von der Bank. Sie bezahlt ihn in n jährlichen Raten von R GE zurück. Die erste Rate ist ein Jahr nach Auszahlung des Kredits fällig. Der Jahreszinssatz für die Restschuld beträgt 3%. Drücken Sie R durch K und n aus.

ÜBUNGSAUFGABE 1.7.5 (Übungsaufgabe 19). Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 3n}$$

mithilfe einer Partialbruchzerlegung.

1.8. Konstruktionen der reellen Zahlen

Im Folgenden werden drei verschiedene Konstruktionen der reelle Zahlen besprochen. Eine rigorose Herleitung der Körperaxiome (Rechenregeln) ist im gegebenen Kontext zu umfangreich und zu wenig lehrreich, als dass es gerechtfertigt wäre, die dafür nötige Zeit zu investieren. Einen kurzen Überblick über diese klassischen Konstruktionen zu erhalten, ist aber nützlich, siehe Kapitel 0.4.

1.8.1. Dezimalbrüche.

SCHULMATHEMATIK UND ANSCHAUUNG 1.8.1 (Definition reelle Zahlen). Eine kurze und auch für die Sekundarstufe 1 brauchbare Definition ist folgende: "Reelle Zahlen sind Kommazahlen." Sie sind somit als endliche oder unendlich Summen von Dezimalbrüchen (also als Grenzwerte rationaler Folgen) definiert. In der Sekundarstufe 2 ist der Begriff "Dezimalzahlen" beliebter als "Kommazahl", die Bedeutung ist die selben. In den Rechtswissenschaften gibt es Bestrebungen, die Fachsprache an die Alltagssprache anzupassen. Für die Schulmathematik wäre dies auch vorteilhaft. In diesem Sinne wäre "Kommazahl" zu bevorzugen. Denken wir diesen Ansatz weiter, stellt sich die Frage, ob der Begriff "reelle Zahl" in der Schulmathematik nicht generell durch "Kommazahl" ersetzt werden sollte?

Oft wird die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in der Sekundarstufe 1 nur durch eine Gerade definiert. Dabei wird nicht geklärt, was eine Gerade ist. Wären Geraden im Sinne der Euklidischen Axiomatik verstanden, dann wären sie beliebige abstrakte Objekte oder Symbole, die Definition wäre dann vollkommen sinnlos. Ist hingegen eine Gerade als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^3$) gemeint, ist die Definition ebenso sinnlos, weil zirkulär.

In zweifacher Hinsicht sehr problematisch sind in Schulbüchern verbreitete Formulierungen wie "Definition: Die reellen Zahlen können auf der Zahlengerade dargestellt werden." Natürliche, ganze und rationale Zahlen können auch auf einer Zahlengeraden dargestellt werden. Abgesehen von der zuvor erwähnten grundsätzlichen Problematik ist eine solche Formulierung also nur das Benennen einer nicht definierenden Eigenschaft. Dies als "Definition" zu bezeichnen ist insofern schädlich, als dass den Schülerinnen dadurch der Begriff "Definition" falsch vermittelt wird. Die Bedeutung des Wortes "Definition" zu verstehen, ist aber auch außerhalb der Mathematik wichtig.

DEFINITION 1.8.2. Wenn (a_k) eine Folge mit $a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ für $k \geq 1$ und $a_0 \in \mathbb{N}$ ist, dann heißt die Reihe

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

positiver bzw. negativer *Dezimalbruch.* Wenn die Folgenglieder ab einer Stelle nicht alle gleich 9 sind, heißt der Dezimalbruch *eigentlich.* Dezimalbrüche heißen *endlich*, wenn die Folgenglieder ab einer Stelle gleich 0 sind und sie heißen *periodisch* mit *Periodenlänge* r, wenn es Folgenglieder

$$a_l, a_{l+1}, \ldots, a_{l+r-1}$$

gibt, die sich unendlich oft unmittelbar aufeinanderfolgend wiederholen.

Eine *reelle Zahl* ist ein eigentlicher Dezimalbruch.

In der Darstellung als *Kommazahl* ist der Dezimalbruch $a_0, a_1 a_2 \dots$ wobei a_0 mit den Ziffern 0 bis 9 in der üblichen Form mit dem dezimalen Stellenwertsystem angeschrieben wird. Ein Periode wird überstrichen markiert:

$$\pm a_0, a_1 \dots a_{l-1} a_l \dots a_{l+r-1} a_l \dots a_{l+r-1} \dots = \pm a_0, a_1 \dots a_{l-1} \overline{a_l \dots a_{l+r-1}}$$

Die Definition der Addition und Multiplikation von Dezimalbrüchen und den Nachweis der Körperaxiome führen wir aus zuvor genannten Gründen (siehe 0.4 und 1.8) nicht aus.

Satz 1.8.3. *Die Folge der Partialsummen eines Dezimalbruchs ist eine rationale Cauchy-Folge.*

Beweis. Für Dezimalbrüche mit positivem Vorzeichen ist die Folge der Partialsummen monoton steigend. Unter Verwendung der Notation aus Definition 1.8.2 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = a_0 + \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = a_0 + \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = a_0 + 1.$$

□

Schulmathematik und Anschauung 1.8.4 (Addition unendlicher Kommazahlen). Auch wenn wir den Additionsalgorithmus nicht formalisieren wollen, lohnt es sich ein wenig über den Fall nachzudenken, dass der Dezimalbruch unendlich ist. Bei endlichen Dezimalzahlen sind wir es gewohnt, von rechts nach links zu addieren. Zum Beispiel für $15 + 17$ rechnen wir $5 + 7 = 12$ schreiben 2 an und nehmen 1 als Übertrag zur 10er-Stelle, dort rechnen $1+1+1 = 3$. Ergebnis: 32. Für unendliche Dezimalzahlen funktioniert das natürlich nicht, denn diese haben keine Stelle die am weitesten rechts liegt.

Der japanische Abakus heißt Soroban und kann für die Grundschule oder für Jugendliche mit Rechenschwäche sehr empfohlen werden. Im Gegensatz zum europäischen Abakus, der 10 Perlen auf jeder Stange hat, besitzt der Soroban ähnlich dem römischen Zahlensystem auf jeder Stange vier 1er-Perlen und eine 5er-Perle, also Perlen für die Zahlen 1, 5, 10, 50, 100, 500 etc. beziehungsweise für entsprechende Werte hinter dem Komma (0,5, 0,1, 0,05, 0,01, . . .). Die Römer verwendeten für Zahlen kleiner als 1 jedoch Brüche (1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 1/12 etc.) anstatt des Stellenwertsystems, so wie das Heute noch zum Beispiel bei Maßangaben für Getränke üblich ist: 1/2 l, 1/3 l, 1/4 l, 1/8 l. Die 5er-Bündelungen haben sich beim Rechnen mit ganzen Zahlen seit der Antike sehr bewährt, da sie auch das Kopfrechnen unterstützen, denn die optische Zahlvorstellungskraft endet meist spätestens bei 8. Selbst der berühmte Graupapagei Alex beherrschte nur einen Zahlenraum bis ca. 8 fehlerfrei, denn ihm wurden weder Zahlenbündelungen noch Stellenwertsystem gelehrt, siehe [**5**]. Die didaktischen Vorteile der 5er-Bündelungen wurden in der Primarstufe wiederentdeckt und werden dort jetzt als die "Kraft der 5" bezeichnet.

Bei der Addition mit dem Soroban wird von links nach rechts gerechnet. Bei der Addition $15 + 17$ rechnet man $1 + 1 = 2$ (mit 10er-Perlen), dann

$5+7 = 12$, was eine dritte Zehnerperle und zwei Einerperlen ergibt. Wenn wir mit Stift und Papier rechnen, wollen wir die berechnete Ziffer jedoch gleich korrekt notieren, das ist ein Handicap. Mit einem mechanischen Rechengerät ist das nicht nötig, es können jederzeit weitere Perlen an die entsprechende Stelle verschoben werden.

Bei einer formalen Definition der Addition von Dezimalbrüchen muss ebenfalls von links nach rechts gerechnet werden, was dem Rechnen mit dem Soroban entspricht.

Die Multiplikation setzt sich zusammen aus der Multiplikation mit Ziffern 0 bis 9, was wiederum einer fortgesetzten Addition entspricht, und aus der Addition von so erhaltenen Dezimalbrüchen.

Satz 1.8.5. *Ein Dezimalbruch konvergiert genau dann gegen eine rationale Zahl, wenn er endlich oder periodisch ist. Die Perodenlänge eines Dezimalbruchs, der gegen einen ganzzahligen Bruch p/q konvergiert, ist höchstens $q-1$. Dezimalbrüche, die nicht eigentlich sind, konvergieren gegen einen endlichen Dezimalbruch.*

Beweis. Die Aussagen folgen aus dem Algorithmus der schriftlichen Division. Bei einer Division ganzer Zahlen $p : q$ kommen bei den Zwischenschritten nur Reste von 0 bis $q-1$ in Frage. Tritt der Rest 0 auf, bricht die Rechnung ab und der Dezimalbruch ist endlich. Anderenfalls muss sich einer der Reste 1 bis $q-1$ irgendwann einmal wiederholen. In diesem Fall tritt eine Periode auf. Da dies nach spätestens $q-1$ Schritten passieren muss, ist die Periodenlänge höchstens $q-1$.

Wie ein periodischer Dezimalbruch x als ganzzahliger Bruch dargestellt werden kann, ist aus der Schulmathematik bekannt: Er wird einmal so mit einer 10er-Potenz multipliziert, dass die erste Periode vor dem Komma auftritt und einmal so, dass die erste Periode hinter dem Komma auftritt. Dies führt auf zwei lineare Gleichungen in x. Subtrahiert man die letztere Gleichung von der ersten und löst die Gleichung nach x, erhält man x als ganzzahligen Bruch.

Dass nicht eigentliche Dezimalbrüche gegen endliche Dezimalbrüche konvergieren, folgt im Wesentlichen aus der Rechnung

$$1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 0,\overline{3} \cdot 3 = 0,\overline{9}.$$

$\square$

In $\mathbb{Q}$ konvergieren zum Beispiel $0,3\overline{9}\dots$ und $0,4$ als Folge der Partialsummen der Reihe gegen die selbe rationale Zahl. Diese beiden Dezimalbrüche sind als reelle Zahl somit gleich. Entweder werden uneigentliche Dezimalbrüche bei der Definition reeller Zahlen ausgeschlossen (so wie wir das getan haben), oder zwei solche Dezimalbrüche werden in der Definition als Äquivalenzklasse zusammengefasst. Reelle Zahlen wären im letzteren Fall also Äquivalenzklassen von Dezimalbrüchen, die aus ein oder zwei Elementen bestehen.

Statt 10 kann natürlich auch jede andere natürlich Zahl größer gleich 2 als Basis gewählt werden. Für die Praxis relevant sind vor allem die Basen 2 und 16 für Binärzahlen bzw. Hexadezimalzahlen in der Informatik.

1.8.2. Dedekindsche Schnitte.
Besonders kurz ist die Konstruktion reller Zahlen als dedekindsche Schnitte.

DEFINITION 1.8.6. Ein *dedekindscher Schnitt* ist ein Paar (L, R) nicht leerer disjunkter Mengen, deren Vereinigung $\mathbb{Q}$ ist, wobei $l \leq r$ für alle $l \in L$ und $r \in R$ und L kein größtes Element hat. Eine *reelle Zahl* ist ein dedekindscher Schnitt.

Der Schnitt (L, R) mit $\min(R) = r \in \mathbb{Q}$ entspricht der rationalen Zahl r. Wenn R kein Minimum hat, entspricht der Schnitt einer irrationalen Zahl. Beispielsweise ist $\sqrt{2}$ der Schnitt $(\mathbb{Q} \setminus R, R)$ mit $R = \{q \in \mathbb{Q} \mid 2 < q^2\}$. Für Mengen rationaler Zahlen A und B sei $A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Die Addition dedekindscher Schnitte wird definiert durch

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) := (L_1 + L_2, R_1 + R_2).$$

Die Größerrelation auf der Menge der Schnitte ist ebenfalls auf natürliche Weise gegeben. Bei der Definition der Multiplikation muss etwas umsichtiger vorgegangen werden. Sie wird zuerst nur für Schnitte größer oder gleich 0 definiert:

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) := (\mathbb{Q} \setminus (R_1 \cdot R_2), R_1 \cdot R_2).$$

Wäre einer der Schnitte jedoch negativ, dann wäre das Produkt nach dieser Definition $(\{\ \}, \mathbb{Q})$, was keinen Sinn macht. Daher wird bei der Multiplikation zuerst ein eventuelles negatives Vorzeichen des Schnittes unberücksichtigt gelassen und die positiven Schnitte miteinander Multipliziert: Danach wird das entsprechende Vorzeichen ergänzt.

Wenn $x = (L, R)$ ein positiver Schnitt ist, besitzt dieser die Wurzel $\sqrt{x} = (\mathbb{Q} \setminus R, R)$ mit $R = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0,\ q^2 \geq x\}$. In $\mathbb{R}$ hat im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ jede positive Zahl eine Wurzel.

1.8.3. Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen zu definieren, mag auf den ersten Blick kompliziert und unnatürlich erscheinen. Für einen rigorosen Aufbau der Analysis ist dieser Zugang aber technisch vorteilhaft und in der Literatur durchaus verbreitet.

DEFINITION 1.8.7. Für Folgen rationaler Zahlen schreiben wir $(x_n) \sim (y_n)$, wenn $\lim |x_n - y_n| = 0$ ist.

SATZ 1.8.8. *Die Relation aus Definition 1.8.7 ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rationalen Folgen.*

BEWEIS. Es seien (x_n), (y_n), (z_n) beliebige rationale Folgen. Wegen $\lim |x_n - x_n| = 0$ ist $(x_n) \sim (x_n)$ für alle Folgen (Relfexivität). Wenn $\lim |x_n - y_n| = 0$, dann ist auch $\lim |y_n - x_n| = 0$, also folgt $y \sim x$ aus $x \sim y$ (Symmetrie).

Wegen der Dreiecksungleichung ist

$$|z_n - x_n| = |(z_n - y_n) + (y_n - x_n)| \leq |z_n - y_n| + |y_n - x_n|.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann sind $|z_n - y_n|$ und $|y_n - x_n|$ jeweils ab einer Stelle kleiner als $\varepsilon/2$ und folglich $|z_n - x_n|$ kleiner als ε. Also ist $\lim |z_n - x_n| = 0$, wenn $\lim |z_n - y_n| = 0$ und $\lim |y_n - x_n| = 0$. Daher ist $(x_n) \sim (z_n)$ falls $(x_n) \sim (y_n)$ und $(y_n) \sim (z_n)$ (Transitivität). $\square$

Mit $\mathcal{C}$ bezeichnen wir die Menge aller rationalen Cauchy-Folgen.

Definition 1.8.9. Die *Menge der reellen Zahlen* ist definiert als Quotientenmenge $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim$, also als Menge aller Äquivalenzklassen auf der Menge der Cauchy-Folgen.

Jede rationale Zahl q wird auch als reelle Zahl aufgefasst, nämlich als jene Äquivalenzklasse von rationalen Cauchy-Folgen, die die konstante Folge $(q)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält.

1.9. Komplexe Zahlen

Schulmathematik und Anschauung 1.9.1 (Problematisches Rechnen mit $\sqrt{-1}$). Die komplexen Zahlen dadurch zu definieren, dass man die reellen Zahlen einfach mit $\sqrt{-1}$ erweitert und damit mit in $\mathbb{R}$ rechnet, führt zu Schwierigkeiten:

$$-1 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Abhilfe verschafft eine formale Definition, in der Addition und Multiplikation über Real- und Imaginärteil definiert werden. Ob komplexe Zahlen als Terme der Form $a + i\cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ oder Zahlenpaare (a, b) definiert werden, ist eine Frage des Geschmacks. Die Definition mit Paaren ist mengentheoretisch klar und somit naheliegend im Rahmen der wissenschaftlichen Mathematik. Bei der Definition mit Termen muss erklärt werden, was i ist, also ein Objekt, das wir *imaginäre Einheit* nennen, das kein Element der reellen Zahlen ist und für das $i^2 = -1$ gilt.

Definition 1.9.2. Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ sind definiert als die Menge aller Paare reeller Zahlen zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b)\cdot(c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Mit diesen Verknüpfungen ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$. Statt (a, b) schreibt man meistens $a + ib$.

Definition 1.9.3. Die Zahl i wird *imaginäre Einheit* genannt. Der *Realteil* einer komplexen Zahl $z = (a, b)$ ist $\mathrm{Re}(z) = a$, der *Imaginärteil* $\mathrm{Im}(z) = b$, die *Konjugierte* $\bar{z} = (a, -b)$ und der *Betrag* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die reellen Zahlen werden als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst, wobei eine relle Zahl x der komplexen Zahl $(x, 0)$ entspricht. Den Umgang mit den vier Grundrechnungsarten in $\mathbb{C}$ setzen wir als bekannt voraus. Die Inversen Elemente von (a, b) sind $(-a, -b)$ bezüglich der Addition, denn

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

Das inverse Element bezüglich der Multiplikation ist

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right), \quad \text{denn} \quad (a, b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) =$$

$$\left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}, a\frac{-b}{a^2+b^2} + b\frac{a}{a^2+b^2}\right) = (1, 0).$$

Subtraktion und Division werden wie in einem Körpern als Addition mit dem inversen Element bezüglich der Addition bzw. als Multiplikation mit dem inversen Element bezüglich der Multiplikation definiert. Das bedeutet

$$(a, b) - (c, d) := (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d) \quad \text{und}$$
$$(a, b) : (c, d) := (a, b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

Man beachte dass $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ ist. Anders geschrieben, heißt das $i^2 = -1$. Die komplexen Zahlen sind also kein Mysterium, über das es sich zu philosophieren lohnt, sondern sie werden auf einfache Weise aus den reellen Zahlen konstruiert.

Die komplexen Zahlen können als sogenannte *Gaussche Zahlenebene* interpretiert werden. Jede komplexe Zahl (a, b) entspricht dabei dem Punkt mit den Koordinaten $(a|b)$. Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert wie die Länge des entsprechenden Vektors. Der Abstand zweier komplexer Zahlen als Betrag der Differenz ist in der Zahlenebene die Länge der Strecke von einer Zahl zur anderen:

$$|(a, b) - (c, d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass komplexe Polynomgleichungen vom Grad n stets n Lösungen haben, wobei eine mehrfache Lösung entsprechend mehrfach gezählt wird. Für jedes komplexe Polynom

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

gibt es komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, die nicht alle notwendiger Weise verschieden sind, sodass sich das vorherige Polynom als Produkt von Linearfaktoren schreiben lässt:

$$a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = 0$$

bzw. gilt dann

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Beispiel 1.9.4. (a) Das Polynom $z^4 - 5z^2 - 36$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. Für $u = z^2$ folgt aus $u^2 - 5u - 36$

$$u = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = 9.$$

Wegen $u = z^2$ ist $z_1 = \sqrt{-4} = 2i$, $z_2 = -\sqrt{-4} = -2i$, $z_3 = \sqrt{9} = 3$, $z_4 = -\sqrt{9} = 3$ und

$$z^4 - 5z^2 - 36 = (z + 2i)(z - 2i)(z + 3)(z - 3).$$

(b) Das Polynom $z^8 - 1$ ist gleich $(z^4 - 1)(z^4 + 1)$. Wir spalten die beiden Faktoren weiter auf:

$$z^4 - 1 = 0 \iff z^4 = 1 \iff z^2 = \pm 1 \iff z \in \{1, -1, i, -i\}.$$

$$z^4 + 1 = 0 \iff z^4 = -1 \iff z^2 = \pm i. \tag{1.9.4.1}$$

Um $z^2 = i$ in (1.9.4.1) zu lösen, setzen wir $z = a + bi$:

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = i \iff a^2 - b^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2ab = 1.$$

Aus $a = \frac{1}{2b}$ und $a^2 = b^2$ folgt

$$\frac{1}{4b^2} = b^2 \iff b^4 = \frac{1}{4} \iff b^2 = \pm\frac{1}{2}.$$

Da b reell ist, wird nur der positive Wert berücksichtigt, und es folgt

$$b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und als Lösungen} \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Für $z^2 = -i$ in (1.9.4.1) ist

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -i \iff a^2 - b^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2ab = -1.$$

Aus $a = -\frac{1}{2b}$ und $a^2 = b^2$ folgt wieder

$$\frac{1}{4b^2} = b^2 \iff b^4 = \frac{1}{4} \iff b^2 = \pm\frac{1}{2}.$$

Als Lösung erhalten wir wegen $2ab = -1$ jedoch diesmal

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Insgesamt hat die Gleichung $z^8 = 1$ also die folgenden acht Lösungen:

$$1,\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -i,\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Diese Lösungen liegen in dieser Reihenfolge in der komplexen Zahlenebene gegen den Uhrzeigersinn angeordnet auf dem Einheitskreis und spannen ein gleichseitiges Achteck auf. Die Gleichung $z^n = 1$ hat stets n Lösung, die n-ten komplexen Einheitswurzeln, die im Einheitskreis ein gleichseitiges n-Eck aufspannen.

Übungsaufgabe 1.9.5 (Übungsaufgabe 20).
Zerlegen Sie $z^4 + 9z^2 - 4iz^2 - 36i$ in Linearfaktoren.

Übungsaufgabe 1.9.6 (Übungsaufgabe 21). Berechnen Sie die dritten komplexen Einheitswurzeln und zerlegen Sie damit $z^3 - 1$ in Linearfaktoren.

Übungsaufgabe 1.9.7 (Übungsaufgabe 22). Welche Bedingung müssen die Werte $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Folge $((a+bi)^n)$ konvergiert?

Experimentieren Sie mit unterschiedlichen Werten für a und b in der Gaußschen Zahlenebene. Sie können für die Visualisierung in Geogebra Schieberegler für a und b definieren und dann die ersten Folgenglieder mit dem Folge-Befehl darstellen. Beachten Sie, dass die imaginäre Einheit in Geogebra mit "Alt+i" eingegeben wird. Noch aufschlussreichere Bilder liefert die Darstellung von Kurven mit dem Befehl "Kurve(Realteil($(a+bi)^t$), Imaginärteil($(a+bi)^t$), t, 0, 100)", auf denen die Folgenglieder liegen.

Beweisen Sie Ihre Vermutung unter Verwendung der Sätze über Beträge komplexer Zahlen und reelle geometrische Folgen.

1.10. Geordnete Körper

Definition 1.10.1. Eine *geordnete Menge* $(M, \leq)$ besteht aus einer Menge M und einer Relation $\leq$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $x \in M$ ist $x \leq x$. (Reflexivität)

(2) Für alle $x, y \in M$ gilt: $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$. (Antisymmetrie)
(3) Für alle $x, y, z \in M$ gilt: $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$. (Transitivität)

Die geordnete Menge heißt *total geordnet*, wenn außerdem gilt:

(4) Für alle $x, y \in M$ ist $x \leq y$ oder $y \leq x$. (Totalität)

Wir schreiben $x < y$, wenn $x \leq y$ und $x \neq y$.

Ein einfaches Beispiel einer Ordnung, die nicht total ist, ist die Teilmengenrelation $\subset$ auf der Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) einer Menge mit mindestens zwei Elementen. Wir verwenden das Symbol $\subset$ gleichbedeutend mit $\subseteq$. Soll betont werden, dass die Mengen nicht gleich sind, schreiben wir $\subsetneq$.

Wir haben bisher rationale Intervalle verwendet, grundsätzlich können Intervalle jedoch in allen total geordneten Mengen definiert werden. Für uns interessant sind im Folgenden nur reelle Intervalle.

Definition 1.10.2. Für a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ heißt

$$
\begin{aligned}
(a;b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \textit{offenes Intervall,}\\
[a;b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \textit{abgeschlossenes Intervall,}\\
(a;b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \textit{rechtsseitig abgeschlossenes Intervall,}\\
[a;b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \textit{linksseitig abgeschlossenes Intervall.}
\end{aligned}
$$

Einseitig abgeschlossene Intervalle heißen *halboffen*. Außerdem schreiben wir

$$
\begin{aligned}
(a;\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\\
[a;\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},\\
(-\infty;b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},\\
(-\infty;b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

Schulmathematik und Anschauung 1.10.3 (Ordnungsrelation). Geordnete Mengen können wir uns als verzweigte gestrüppartige Struktur vorstellen, in der es ein Oben und ein Unten gibt. Die Elemente der Menge sind Punkte auf dem Gestrüpp. Gibt es von x nach y einen Weg, der nur bergauf und nie waagrecht oder bergab verläuft, schreiben wir $x \leq y$. Bei total geordneten Mengen ist dieses Gestrüpp nur eine Gerade ohne Verzweigungen oder ein Teil einer solchen Geraden (z.B. ein Strahl).

Definition 1.10.4. Ein Körper $(K, \oplus, \odot)$ mit Nullelement $\mathbf{0}$, der auch eine total geordnete Menge $(K, \leq)$ ist, heißt *geordneter Körper* wenn für alle $x, y, z \in K$ gilt:

(1) Aus $x \leq y$ folgt $x \oplus z \leq y \oplus z$.
(2) Wenn $x > \mathbf{0}$ und $y > \mathbf{0}$, dann ist $x \odot y > \mathbf{0}$.

Wenn diese Definition erfüllt ist, gilt (1) auch für $<$ statt $\leq$ und (2) auch für $\geq$ statt $>$.

Schulmathematik und Anschauung 1.10.5 (Geordneter Körper). Für einen geordneten Körper genügt es nicht, eine totale Ordnung zu haben, durch die K auf einer Gerade angeordnet wird, es muss diese Ordnung auch mit den Rechenoperationen des Körpers harmonieren. Die komplexen Zahlen können zwar total geordnet werden (z.B. durch die lexikographische

Ordnung), eine solche Ordnung würde aber nicht mit den Rechenoperationen der komplexen Zahlen harmonieren.

Grundsätzlich müssen wir für den Aufbau der Analysis nichts aus den Axiomen eines geordneten Körpers sondern aus der Konstruktion der reellen Zahlen ableiten. Wenn wir in Satz 1.10.7 zeigen, dass es keine Ordnung gibt, die die komplexen Zahlen zu einem geordneten Körper macht, ist dies eine Aussage über die Axiomatik geordneter Körper. Mit ihr müssen wir uns zu diesem Zweck ein wenig auseinandersetzen.

Satz 1.10.6. *In einem geordneten Körper* $(K, \oplus, \odot)$ *mit Nullelement* $\mathbf{0}$ *und Einselement* $\mathbf{1}$ *gilt:*

(1) $x < y \iff -y < -x$.
(2) *Aus* $x < y$ *und* $z < \mathbf{0}$ *folgt* $x \odot z > y \odot z$.
(3) $\mathbf{1} > \mathbf{0}$.
(4) *Für alle* $x \in K \setminus \{\mathbf{0}\}$ *gilt* $x > \mathbf{0} \iff x^{-1} > \mathbf{0}$.

Beweis. (1)

$$x < y \iff x \oplus -x < y \oplus -x \iff \mathbf{0} < y \oplus -x \iff$$

$$-y \oplus \mathbf{0} < -y \oplus y \oplus -x \iff -y < -x.$$

(2) Nach (1) gilt $z < \mathbf{0} \iff -\mathbf{0} < -z$ bzw. $\mathbf{0} < -z$, weil $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Aus dem ersten Axiom für geordnete Körper folgt $x \odot -z < y \odot -z$. Nach Satz 1.2.8 ist dies Äquivalent zu

$$x \odot (-\mathbf{1}) \odot z < y \odot (-\mathbf{1}) \odot z \iff$$

$$(-\mathbf{1}) \odot x \odot z < (-\mathbf{1}) \odot y \odot z \iff -(x \odot z) < -(y \odot z).$$

Nach (1) ist dies äquivalent zu $x \odot z > y \odot z$.

(3) Wir nehmen indirekt an, dass $\mathbf{1} < \mathbf{0}$ ist. Addieren wir auf beiden Seiten $-\mathbf{1}$ erhalten wir $\mathbf{0} < -\mathbf{1}$. Das zweite Axiom für geordnete Körper impliziert nun $\mathbf{1} \odot -\mathbf{1} < \mathbf{0} \odot -\mathbf{1}$ und somit $-\mathbf{1} < \mathbf{0}$ woraus $\mathbf{0} < \mathbf{1}$ folgt, was im Widerspruch zur Annahme steht und (3) bewiesen ist.

Es sei $x > \mathbf{0}$. Um (4) zu zeigen, nehmen wir indirekt $x^{-1} < \mathbf{0}$ an. Aus (2) folgt $x \odot x^{-1} < \mathbf{0} \odot x^{-1} \iff \mathbf{1} < \mathbf{0}$, was nach (3) falsch ist. $\square$

Satz 1.10.7. *Es gibt keine Ordnung, mit der die komplexen Zahlen ein geordneter Körper sind.*

Beweis. Wir verwenden die Notation aus Definition 1.9.2. Angenommen, es gäbe eine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{C}$, sodass $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper wäre. Wenn $i > 0$ ist folgt $i^2 = -1 > 0$ beziehungsweise $1 < 0$, was nach 1.10.6.3 falsch ist. Ist $i < 0$ folgt $-i > 0$ und $(-i)^2 > 0$. Es folgt $(-i)^2 = -1 > 0$, was wieder ein falsche Aussage ist. Somit führt die Annahme, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper ist, in jedem Fall auf einen Widerspruch. $\square$

Übungsaufgabe 1.10.8 (Übungsaufgabe 23). Zeigen Sie: Für positive x und y in einem geordneten Körpers gilt

$$x < y \iff x^2 < y^2.$$

1.11. Metrische Räume

Mit $\mathbb{R}^+$ bezeichnen wir die *Menge der positiven reellen Zahlen* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, und mit $\mathbb{R}^-$ die *Menge der negativen reellen Zahlen* $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. Die nicht negativen Zahlen sind $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Metrische Räume sind Mengen mit einem Abstandbegriff. Der Abstand zweier Punkte ist eine nicht negative reelle Zahl.

Definition 1.11.1 (Metrischer Raum).
Wenn X eine Menge und d eine Abbildung $X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ ist, dann heißt das Paar (X, d) *metrischer Raum*, wenn für alle x, y und z gilt:

(1) $d(x, y) > 0$ wenn $x \neq y$ und $d(x, x) = 0$ (Definitheit),
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung).

Die Abbildung d heißt *Metrik*.

Wenn wir uns x, y und z als Dreieck vorstellen, besagt die Dreiecksungleichung, dass keine Seite länger ist als die beiden anderen Seiten zusammen.

Satz 1.11.2. *Für alle* $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id \in \mathbb{C}$ *gilt*

(1) $|ad + bc| \leq |z_1| \cdot |z_2|$ *und* $|ac + bd| \leq |z_1| \cdot |z_2|$,
(2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
(3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Beweis. (1) Aus $0 \leq (ac - bd)^2$ folgt $2acbd \leq a^2c^2 + b^2d^2$. Durch Addition von $a^2d^2 + b^2c^2$ auf beiden Seiten folgt

$$a^2d^2 + 2acbd + b^2c^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \iff$$
$$(ad + bc)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \Rightarrow |ad + bc| \leq |z_1| \cdot |z_2|.$$

Wegen $|c + id| = |d + ic| = \sqrt{c^2 + d^2}$ können c und d (ebenso a und b) vertauscht werden. Daher gilt auch

$$|ac + bd| \leq |z_1| \cdot |z_2|.$$

(2)

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} = |z_1| + |z_2| \iff$$
$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \leq a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} + c^2 + d^2 \iff$$
$$2ac + 2bd \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \iff ac + bd \leq |z_1| \cdot |z_2|.$$

Letztere Ungleichung haben wir in (1) gezeigt, somit ist (2) bewiesen.

(3)

$$|z_1 \cdot z_2| = |ac - bd + i(ad + bc)| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} =$$
$$\sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} =$$
$$\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = |z_1| \cdot |z_2|$$

□

Bei Beweisen dieser Art ist zu beachten, dass das Quadrieren und Wurzeln einer Gleichung oder Ungleichung eine Äquivalenzumformung ist, wenn beide Seiten der Gleichung bzw. Ungleichung nicht negativ sind. Wenn eine der Seiten negativ sein kann, ist Vorsicht geboten.

Beispiel 1.11.3. Alle bisher kennengelernten Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sowie alle Teilmengen davon sind metrische Räume mit $d(x, y) = |y - x|$.

Aus der Dreiecksungleichung für Beträge ($|x + y| \leq |x| + |y|$) folgt die Dreiecksungleichung für diese Metrik:

$$d(x, y) + d(y, z) = |y - x| + |z - y| \geq |y - x + z - y| = |z - x| = d(x, z).$$

Wir nennen diese Metrik auf den Zahlenbereichen die *gewöhnliche Metrik*.

Die Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist ein metrischer Raum, wenn wir den Abstand zweier Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf eine der folgenden Arten definieren:

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \quad \text{oder} \\ d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}. \end{aligned}$$

In der Ebene heißt d_1 der euklidische Abstand und d_2 ist die Länge eines kürzesten Weges, der sich in waagrechte und senkrechte Teilabschnitte zerlegen lässt.

Beispiel 1.11.4. Es sei X eine beliebige Menge, x, $y \in X$ und

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y, \\ 1 & \text{wenn } x \neq y. \end{cases}$$

Es ist (X, d) ein metrischer Raum, der *diskreter Raum* genannt wird, und d ist die *diskrete Metrik*.

Definition 1.11.5. Wenn $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, dann heißt

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

offene ε-Umgebung von x im metrischen Raum (X, d). Ein Punkt x heißt *innerer Punkt* einer Menge $M \subset X$ und M heißt *Umgebung* von x, wenn M eine offene ε-Umgebung von x enthält. Die Menge M heißt *offen*, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht, und sie heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus M$ offen ist.

Beispiel 1.11.6. In einem diskreten Raum X sind alle Mengen offen und abgeschlossen. Denn wenn $M \subset X$ und $x \in M$, dann ist $U_1(x) = \{x\} \subset M$. Folglich ist jeder Punkt x ein innerer Punkt von M und M ist offen. Wenn alle Mengen offen sind, sind auch die Komplemente aller Mengen offen. Also sind auch alle Mengen abgeschlossen.

Beispiel 1.11.7. Offene Intervalle in $\mathbb{Q}$ bzw. in $\mathbb{R}$ sind offene Mengen, abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossene Mengen in $\mathbb{Q}$ bzw. in $\mathbb{R}$. Die offene Kreisscheibe

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$$

mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r ist eine offene Teilmenge von $(\mathbb{R}^2, d_1)$ mit d_1 aus Beispiel 1.11.3, aber auch bezüglich der anderen Abstandsfunktionen d_2 oder d_3.

Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist immer offen, da auch die Vereinigung dann nur innere Punkte hat.

Beispiel 1.11.8. Ob eine Menge offen ist oder nicht, hängt von der Abstandsfunktion der Grundmenge, aber auch von der Grundmenge ab.

(1) Es sei $X = \mathbb{R}$ die Grundmenge und A eine Menge, die nur aus einer einzigen reellen Zahl besteht. Wenn X mit der diskreten Metrik versehen wird, ist A offen, trägt $\mathbb{R}$ die gewöhnliche Metrik, ist A nicht offen.

(2) Mit d bezeichnen wir die gewöhnliche Metrik in $\mathbb{R}$. In $X = \mathbb{R}$ ist das halboffene Intervall $[0; 2)$ nicht offen, denn 0 ist kein innerer Punkt. In $X = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty)$ ist $[0; 2)$ hingegen eine offene Menge, denn die offene Umgebung $U_1(0)$ ist in dieser Grundmenge $[0; 1)$, also eine Teilmenge von $[0; 2)$. Daher ist 0 in $X = \mathbb{R}_0^+$ ein innerer Punkt von $[0; 2)$. Alle anderen Punkte in $[0; 2)$ sind ohnehin innere Punkte von $[0; 2)$, also ist $[0; 2)$ in $X = \mathbb{R}_0^+$ eine offene Menge.

(3) Was wir in (2) gesehen haben, lässt sich allgemeiner formulieren. Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $Y \subset X$ und d_Y die Einschränkung von d_X auf Y, d.h. $d_Y(x, y) = d_X(x, y)$ für alle x, $y \in Y$. Bezeichnen wir mit $U_\varepsilon^{(X)}(x)$ und $U_\varepsilon^{(Y)}(x)$ die ε-Umgebungen in X bzw. in Y eines Punktes x, so gilt

$$U_\varepsilon^{(Y)}(x) = Y \cap U_\varepsilon^{(X)}(x).$$

Man nennt $(Y, d^{(Y)})$ die *Spur* von Y in $(X, d^{(X)})$.

Die Punkte (2) und (3) sind wichtig im Hinblick auf eine korrekte Definition lokaler Extremstellen reeller Funktionen in der Schulmathematik.

Nicht nur die Zahlenbereiche und der $\mathbb{R}^n$ sind metrische Räume, sondern auch viele weitere mathematische Strukturen, wie Mengen von Funktionen, kombinatorische Graphen, gekrümmte Flächen und vieles mehr.

Übungsaufgabe 1.11.9 (Übungsaufgabe 24).
Ist $(\mathbb{R}^2, d)$ ein metrischer Raum für

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2?$$

Übungsaufgabe 1.11.10 (Übungsaufgabe 25). Es sei d der euklidische Abstand in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B}$ eine Menge von beschränkten Teilmengen der Ebene. Beweisen Sie für die folgenden Abstandbegriffe entweder, dass sie $\mathcal{B}$ zu einem metrischen Raum machen, oder zeigen Sie dass dies nicht der Fall ist, indem Sie ein geeignetes System $\mathcal{B}$ und Mengen daraus wählen, sodass eines der Axiome für metrische Räume verletzt ist. Für E, $F \in \mathcal{B}$ ist

$$d_1(E, F) := \inf\{d(e, f) \mid e \in E,\ f \in F\} \quad \text{und}$$

$$d_2(E, F) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } E = F, \\ \sup\{d(e, f) \mid e \in E,\ f \in F\}, & \text{wenn } E \neq F. \end{cases}$$

1.12. Konvergenz in metrischen Räumen

Abgesehen davon, dass Umgebungen in einem metrischen Räumen anders aussehen können als in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, lauten die beiden Definition der Konvergenz von Folgen und die Definition einer Cauchy-Folge gleich wie die Definitionen 1.4.1, 1.4.7 und 1.4.8:

Definition 1.12.1 (Cauchy-Folgen in einem metrischen Raum).
Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d) ist eine *Cauchy-Folge*,

wenn für alle $\varepsilon > 0$ ab einer Stelle die Abstände der Folgenglieder zueinander kleiner als ε sind.

Formal: Die Folge ist eine *Cauchy-Folge*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist für alle n, m mit $n, m \geq N$.

DEFINITION 1.12.2 (Konvergenz in einem metrischen Raum). Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d) *konvergiert gegen* x, $x \in X$, wenn sie in jeder Umgebung von x ab einer Stelle enthalten ist. So ein Punkt heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge. Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

oder wenn klar ist, welcher der Index ist, dann auch $\lim x_n = x$.

DEFINITION 1.12.3 (ε-Definition der Konvergenz).
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für alle $n \geq n_0$.

SATZ 1.12.4 (siehe Satz 1.4.9). *In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

BEWEIS. Es sei $\lim x_n = x$ und $\varepsilon > 0$. Da die Folge konvergent ist, liegt sie ab einer Stelle in $U_{\varepsilon/2}(x)$. Ab dieser Stelle gilt für alle Folgenglieder x_m und x_n:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Die Folge ist somit eine Cauchy-Folge. □

KOROLLAR 1.12.5. Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.

SATZ 1.12.6. *Eine Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.*

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung zu Satz 1.4.11. Der frühere Beweis hat rationale Intervalle verwendet, also eine Ordnung. In metrischen Räumen haben wir im allgemeinen keine Ordnung, die sinnvoll mit der Metrik zusammenspielt, daher muss der Beweis für metrische Räume geringfügig umformuliert werden.

BEWEIS. Wir nehmen indirekt an, dass eine Folge (x_n) zwei verschiedene Grenzwerte a und b hat und definieren $\varepsilon := d(a, b)/2$. Dann sind $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ zwei disjunkte Umgebungen dieser Grenzwerte. Eine Folge kann aber nicht ab einer Stelle in einer Menge und zugleich ab einer Stelle in einer dazu disjunkten Menge liegen. □

1.13. Vollständigkeit

DEFINITION 1.13.1. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Reelle Zahlen wurden in Kapitel 1.8 auf drei Arten aus den rationalen Zahlen konstruiert:

(1) Dezimalbrüche,
(2) Dedekindsche Schnitte,
(3) Äquivalenzklassen von rationalen Cauchy-Folgen.

Aus diesen Konstruktionen lässt sich folgender Satz ableiten:

SATZ 1.13.2. *Die Menge der reellen Zahlen ist ein vollständiger metrischer Raum (bzgl. der gewöhnlichen Abstandsmetrik).*

In Kapitel 1.4 haben wir gesehen, dass grundsätzlich alle konvergenten Folgen Cauchy-Folgen sind. Aber nicht alle Cauchy-Folgen sind in $\mathbb{Q}$ konvergent, siehe Kapitel 1.5. Die rationalen Zahlen sind somit nicht vollständig.

DEFINITION 1.13.3. Wir nennen $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Menge der *irrationalen Zahlen.*

SATZ 1.13.4. *Wenn x rational und y irrational ist, dann ist $x + y$ irrational. Wenn außerdem $x \neq 0$ ist, dann ist xy irrational.*

BEWEIS. Wenn die Summe $x + y$ (bzw. das Produkt xy) rational wäre, dann wäre auch $x+y-x$ (bzw. $x \cdot y/x$) und somit y rational, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

SATZ 1.13.5. *Zwischen allen Paaren verschiedener reeller Zahlen liegen unendlich viele rationale und unendlich viele irrationale Zahlen.*

In der Topologie sagt man, dass sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{I}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegen.

BEWEIS VON SATZ 1.13.5. Die Aussage wird aus der Konstruktion reellen Zahlen durch Dedekind-Schnitte (L, R) abgeleitet. Nach Definition 1.8.6 hat L kein größtes Element. Von zwei gegebenen verschiedenen reellen Zahlen sei $x = (L_x, R_x)$ die kleinere und $y = (L_y, R_y)$ die größere. Der Durchschnitt $R_x \cap L_y$ ist nicht leer, sonst wäre $x = y$. Dass der Durchschnitt nur aus dem Minimum von R_x besteht, ist unmöglich, denn dann wäre dieses Minimum zugleich das Maximum von L_y. Also existiert ein (rationales) z in diesem Durchschnitt und wenn wir z als Dedekind-Schnitt denken, gilt $x < z < y$. Zwischen x und z und zwischen z und y liegen nach dem selben Argument weitere rationale Zahlen. Dies lässt sich induktiv fortsetzen, weswegen zwischen x und z unendlich viele rationale Zahlen liegen.

Für $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ ist

$$p < p + \frac{\sqrt{2}}{2}(q - p) < q$$

wegen $0 < \sqrt{2}/2 < 1$. Dass der mittlere Term der Ungleichungskette irrational ist, folgt aus Satz 1.13.4. Also liegt zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen eine irrationale Zahl. Da zwischen x und y unendlich viele verschiedene rationale Zahlen liegen, müssen auch unendlich viele irrationale Zahlen zwischen x und y liegen. $\square$

Die reellen Zahlen bilden wie die rationalen Zahlen einen Körper, siehe zum Beispiel [**10**, Kapitel 5.4]. Unsere bisherigen Argumente in den Sätzen über rationale Zahlen basieren meist nur auf den Axiomen eines (geordneten) Körpers, also auf den Rechenregeln für die vier Grundrechnungsarten. Aus diesem Grund können Definitionen und Aussagen aus den Kapiteln 1.4 und 1.6 unverändert auf die reellen Zahlen übertragen werden. Insbesondere betrifft dies Definition 1.4.1 (Cauchy-Folgen), Satz 1.4.4 (Cauchy-Folgen sind beschränkt), Satz 1.4.6 (beschränkte, monotone Folgen sind Cauchy), Definitionen 1.4.7 und 1.4.8 (Definitionen Konvergenz), Satz 1.4.9 (konvergente Folgen sind Cauchy), Korollar 1.12.5 (konvergente Folgen sind beschränkt), satz:maxeingrenzw (Grenzwert eindeutig), Definition 1.4.12 (Nullfogen), Satz 1.6.1 (Ungleichung von Bernoulli), Definition 1.6.3 (geometrische Folge), Satz 1.6.4 (Konvergenz geometrische Folge), Satz 1.7.2 (geometrische Reihe).

SATZ 1.13.6. *Jede monotone beschränkte reelle Folge ist konvergent.*

BEWEIS. Wir haben in Satz 1.4.6 gezeigt, dass jede rationale beschränkte monotone Folge eine Cauchy-Folge ist. Der Beweis gilt genauso auch für reelle Folgen. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, folgt die Aussage des Satzes. $\square$

SATZ 1.13.7. *Sind $z_n = (a_n, b_n)$ und $z = (a, b)$ komplexe Zahlen, dann gilt:*

$$\lim z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim a_n = a \ \ \textit{und} \ \ \lim b_n = b.$$

BEWEIS. Es ist

$$\lim z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim |z_n - z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = 0.$$

Um die Implikation "$\Rightarrow$" des Satzes zu zeigen, sei $\varepsilon < 0$ beliebig und

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon \quad \text{ab einer Stelle} \quad n_0.$$

Es folgt

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow (a_n - a)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

ab der Stelle n_0 und daher $\lim a_n = a$. Analog wird $\lim b_n = b$ gezeigt.

Für die Implikation "$\Leftarrow$" sei $\varepsilon < 0$ wiederum beliebig und n_0 ein Index ab dem $|a_n - a| < \varepsilon/\sqrt{2}$ und $|b_n - a| < \varepsilon/\sqrt{2}$ ist. Dann folgt

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2} = \varepsilon$$

ab der Stelle n_0. Das bedeutet $\lim \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = 0$, was den Beweis vervollständigt.

Die Wahl $\varepsilon/\sqrt{2}$ mag zunächst wenig plausibel erscheinen. Grundsätzlich kann man den Beweis auch zunächst so anschreiben, dass für ein beliebiges $\eta > 0$ der Index n_0 so wählt wird, dass $|a_n - a| < \eta$ und $|b_n - b| < \eta$ ab der Stelle n_0 gilt. Die Rechnung führt dann auf $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{2}\eta$. Nun setzt man $\varepsilon = \sqrt{2}\eta$ und ersetzt η durch $\varepsilon/\sqrt{2}$. $\square$

SATZ 1.13.8. *Die komplexen Zahlen sind vollständig.*

BEWEIS. Es sei (z_n) mit $z_n = (a_n, b_n)$ eine komplexe Cauchy-Folge. Das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, sodass $|z_m - z_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Dann ist

$$|z_m - z_n|^2 = (a_m - a_n)^2 + (b_m - b_n)^2 < \varepsilon^2$$

und folglich $|a_m - a_n| < \varepsilon$ und $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Das heißt, (a_n) und (b_n) sind reelle Cauchy-Folgen, die wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ (siehe Satz 1.13.2) konvergieren. Nach Satz 1.13.7 konvergiert auch (z_n), was bedeutet, dass $\mathbb{C}$ vollständig ist. $\square$

Aus der Konstruktion der Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sehen wir, dass die mit Abstand aufwändigste Konstruktion jene der reellen Zahlen ist. Die wichtigsten Eigenschaften, die diese Zahlenbereiche voneinander unterscheiden sind folgende:

$\mathbb{N}$: In $\mathbb{N}$ kann addiert und multipliziert werden werden.
$\mathbb{Z}$: In $\mathbb{Z}$ gibt es im Gegensatz zu $\mathbb{N}$ eine Umkehrung der Addition.
$\mathbb{Q}$: In $\mathbb{Q}$ gibt es im Gegensatz zu $\mathbb{Z}$ eine Umkehrung der Multiplikation.
$\mathbb{R}$: In $\mathbb{R}$ ist im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ jede Cauchy-Folge konvergent.
$\mathbb{C}$: In $\mathbb{C}$ hat im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ jedes Polynom eine Nullstelle.

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind überabzählbar. Die Menge der komplexen Zahlen ist die einzige dieser Mengen, die sich nicht sinnvoll auf einer Geraden darstellen lässt. Formal bedeutet dies, dass $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper ist, siehe Satz 1.10.7. Dass in $\mathbb{C}$ jede Polynomgleichung eine Lösung hat, besagt der Fundamentalsatz der Algebra.

1.14. Intervallschachtelungen

DEFINITION 1.14.1. Die *Länge* eines offenen Intervalls $(a;b)$ oder abgeschlossenen Intervalls $[a;b]$ ist definiert als $b-a$. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $([a_n;b_n])$ heißt *Intervallschachtelung*, wenn ihre Längen gegen Null konvergieren und $[a_n;b_n] \supset [a_{n+1};b_{n+1}]$ ist für alle n.

Eine Folge *liegt* in einer Intervallschachtelung, wenn sie in jedem der Intervalle ab einer Stelle enthalten ist.

BEISPIEL 1.14.2. Die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in $([0;1/2^n])_{n\in\mathbb{N}}$.

BEWEIS. Wir müssen beachten, dass nicht zweimal der selbe Buchstabe "n" verwendet werden darf, wenn der Index der Intervallschachtelung mit dem Index der Folge verglichen wird. Im Intervall $[0;1/2^n]$ liegt die Folge $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ ab der Stelle $k=2^n$. □

SATZ 1.14.3. *Eine Folge reeller Zahlen, die in einer Intervallschachtelung liegt, ist Cauchy-Folge.*

BEWEIS. Wir nehmen an, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in einer Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und I_N ein Intervall, dessen Länge kleiner ε ist. Die Glieder x_n liegen ab einer Stelle in I_N. Daher ist $|x_m - x_n| < \varepsilon$ für alle m,n ab dieser Stelle und (x_n) eine Cauchy-Folge. □

1.15. Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen

Aus der StEOP wissen wir, dass ein Supremum $\sup A$ einer Menge A ihre kleinste obere Schranke ist. Diese kann Element der Menge sein, dann ist sie ein Maximum, sie muss aber nicht Element der Menge sein. Ein Infimum (Notation $\inf A$) ist eine größte untere Schranke. Wenn in einer total geordneten Menge für eine Teilmenge Supremum (bzw. Infimum) exitieren, dann sind sie eindeutig. Für die im folgenden Satz verwendeten Begriffe siehe bei Bedarf Definitionen 4.2.28, 4.2.32., 6.3.1 und 6.4.1 aber auch Proposition 6.4.2 in [**10**].

SATZ 1.15.1 (Supremums- und Infimumseigenschaft).
Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig, das heißt, jede nicht leere nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum und jede nicht leere nach unten beschränkte Menge hat ein Infimum.

BEWEIS. Eine Menge A habe eine obere Schranke b_0. Es sei a_0 eine Zahl, die kleiner als irgendein Element von A ist. Wir definieren $I_0 = [a_0, b_0]$ und für $n \geq 1$ sei

$$I_n = [a_n, b_n] = \begin{cases} [a_{n-1}; \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}], & \text{falls } [\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}; b_{n-1}] \cap A = \emptyset, \\ [\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}; b_{n-1}] & \text{falls } [\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}; b_{n-1}] \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Vollständige Induktion impliziert, dass b_n für alle n eine obere Schranke von A und a_n keine obere Schranke von A und dass $[a_n, b_n]$ ein Element von A enthält. Die Randpunkte der Intervalle sind Cauchy-Folge und konvergieren gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Um zu sehen, dass x das gesuchte Supremum von A ist, müssen wir uns zwei Punkte überlegen:

Erstens, dass x eine obere Schranke von A ist. Dies folgt aus der Definition der Zahlen b_n die alle größer oder gleich jedem Element von A sind. Und zweitens, dass x die kleinste obere Schranke von A ist: Wir nehmen an, es gibt eine kleinere obere Schranke y. Diese kleinere Schranke müsste aber ebenso in allen Intervallen $[a_n; b_n]$ liegen. □

In der Intervallschachtelung dieses Beweises folgt jedem Intervall entweder die linke oder die rechte Hälfte des Intervalls. Dieses *Verfahren der Intervallhalbierung* ist eine Technik, die wir noch öfters anwenden werden.

ÜBUNGSAUFGABE 1.15.2 (Übungsaufgabe 26). Haben folgende Mengen ein Supremum bzw. ein Infimum in $\mathbb{Q}$ und/oder in $\mathbb{R}$? Wenn ja, welches?

$$(a) \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(-\frac{1}{n}, 1 \right) \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \right) \qquad (b) \quad \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$$

ÜBUNGSAUFGABE 1.15.3 (Übungsaufgabe 27). Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer, nach unten beschränkt und $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Zeigen Sie, dass $\inf A = -\sup(-A)$ ist.

1.16. Grenzwertsätze in $\mathbb{C}$

DEFINITION 1.16.1. Eine Menge komplexer Zahlen ist *beschränkt*, wenn die Menge ihrer Beträge (als Menge reeller Zahlen) beschränkt ist. Ein komplexe Folge ist *beschränkt*, wenn die Menge ihrer Glieder beschränkt ist.

SATZ 1.16.2. *Wenn (x_n) eine komplexe Nullfolge und (y_n) eine beschränkte komplexe Folge ist, dann ist $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.*

BEWEIS. Es sei $c \in \mathbb{R}^+$ eine obere Schranke der Beträge $|y_n|$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist ab einer Stelle $|x_n| < \varepsilon/c$ bzw. $|x_n|c < \varepsilon$ und somit $|x_n||y_n| = |x_n y_n| < \varepsilon$ ab einer Stelle. Also ist $(x_n y_n)$ eine Nullfolge. □

SATZ 1.16.3. *Wenn (x_n) und (y_n) konvergent sind, dann konvergieren auch $(x_n + y_n)$ und $(x_n y_n)$ und es ist*

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n, \tag{1.16.3.1}$$

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n. \tag{1.16.3.2}$$

BEWEIS. Es sei $x := \lim(x_n)$ und $y := \lim(y_n)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ sind $|x_n - x|$ und $|y_n - y|$ ab einer Stelle kleiner als $\varepsilon/2$. Also ist ab einer Stelle

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit konvergiert $(x_n + y_n)$ gegen $x + y$. Für das Produkt der Folgen gehen wir ähnlich vor:

$$\begin{aligned}|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|,\end{aligned}$$

wobei wir hier die Dreieckungleichung (Satz 1.11.2) verwendet haben. Die Summanden des letzten Terms bilden nach Satz 1.16.2 Nullfolgen. Nach (1.16.3.1) ist die Summe zweier Nullfolgen eine Nullfolge, $|x_n y_n - xy|$ ist somit ebenso eine Nullfolge bzw. ist $\lim(x_n y_n) = xy$. □

Korollar 1.16.4. Wenn $\lim x_n = x$ und c eine Zahl ist, dann ist

$$\lim(cx_n) = cx.$$

Beweis. Wie Satz 1.16.3.2 für $y_n = c$. □

Satz 1.16.5 (Sandwich-Theorem). *Wenn* $\lim x_n = \lim z_n = a$, *und* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *für fast alle* n, *dann ist auch* $\lim y_n = a$.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist ab einer Stelle

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

und daher

$$-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon$$

beziehungsweise

$$|y_n - a| < \varepsilon.$$

Somit ist $\lim y_n = a$. □

Satz 1.16.6. *Wenn* (x_n) *und* (y_n) *konvergent sind,* $y_n \neq 0$ *ist für alle* n *und* $\lim(y_n) \neq 0$, *dann ist*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

Beweis. Es sei $\lim x_n = x$ und $\lim y_n = y$. Zuerst wird $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ untersucht:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \underbrace{\frac{1}{|y_n|}}_{\text{beschr.}} \underbrace{\frac{1}{|y|}}_{\text{konst.}} \underbrace{|y - y_n|}_{\to 0}.$$

Der erste Faktor der rechten Seite ist beschränkt, der zweite konstant und der dritte strebt gegen Null. Nach Korollar 1.16.4 ist $|y - y_n|/|y|$ eine Nullfolge und nach Satz 1.16.2 auch der ganze letztere Term, also strebt $1/y_n$ gegen $1/y = 1/\lim y_n$. Aus 1.16.3.2 folgt

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim x_n \lim \frac{1}{y_n} = \lim x_n \frac{1}{\lim y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

□

Übungsaufgabe 1.16.7 (Übungsaufgabe 28).
Ist die Folge (x_n) konvergent? Wenn ja, wohin konvergiert sie? Begründen Sie Ihre Antwort mit Grenzwertsätzen.

(1) $\quad x_n = \dfrac{(1 - 4n^2)^2}{(1 + 2n)(1 - 2n)(4n + 4)^2}$

(2) $\quad x_n = \dfrac{n^3}{(n+1)^2}$

ÜBUNGSAUFGABE 1.16.8 (Übungsaufgabe 29). Ist die Folge (x_n) konvergent? Wenn ja, wohin konvergiert sie? Begründen Sie Ihre Antwort mit Grenzwertsätzen.

(1) $\quad x_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{(n+3)^3}$

(2) $\quad x_n = \dfrac{(-1)^n n}{1+n}$

ÜBUNGSAUFGABE 1.16.9 (Übungsaufgabe 30).
Zeigen Sie, dass $\left(n^3/2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Hinweis: Es folgt $n^3/2^n \leq 1/n$ aus $n^4 \leq 2^n$. Zum Induktionsschritt: Für große n, ist der Faktor, der n^4 in $(n+1)^4$ umwandelt, kleiner als 2.

1.17. Wurzeln und rationale Exponenten

DEFINITION 1.17.1. Wenn $x^k = c$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, dann nennen wir x eine *k-te Wurzel* von c und bezeichnen sie mit $\sqrt[k]{c}$ oder $c^{1/k}$.

SATZ 1.17.2. *Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ haben alle positiven reellen Zahlen eine eindeutig bestimmte k-te Wurzel in $\mathbb{R}^+$.*

Der folgende Beweis verwendet die Supremumseigenschaft der reellen Zahlen (Satz 1.15.1) und die Grenzwertsätze für Folgen. Die k-ten Wurzeln lassen sich aber auch in der Terminologie der Dedkind-Schnitte formulieren, siehe 1.8.2.

BEWEIS. Wegen der Supremumseigenschaft hat für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ die Menge $\{a \in \mathbb{R}^+ \mid a^k \leq c\}$ ein eindeutiges Supremum x. Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist $(x - 1/n)^k \leq c$, denn wenn $(x - 1/n)^k > c$ wäre, dann wäre $x - 1/n$ eine kleinere obere Schranke als x und x nicht das Supremum. Außerdem ist $(x + 1/n)^k > c$, denn wäre $(x + 1/n)^k \leq c$, dann wäre x gar keine obere Schranke. Es folgt $(x - 1/n)^k \leq c < (x + 1/n)^k$ und

$$\lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^k \leq c \leq \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^k,$$

siehe Übungsaufgabe 1.4.17. Wegen des Grenzwertsatzes für Produkte (1.16.3.2) ist das gleichbedeutend mit

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)\right)^k \leq c \leq \left(\lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)\right)^k$$

und somit

$$x^k \leq c \leq x^k \quad \text{beziehungsweise} \quad x^k = c.$$

Also ist x die k-te Wurzel von c in $\mathbb{R}^+$. □

Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^+$ ist

$$(\sqrt[n]{x^m})^n = x^m \quad \text{und} \quad ((\sqrt[n]{x})^m)^n = (\sqrt[n]{x})^{mn} = ((\sqrt[n]{x})^n)^m = x^m,$$

was folgende Definition gerechtfertigt:

DEFINITION 1.17.3. Für $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^+$ ist

$$x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

Weiters ist $x^{-q} := \frac{1}{x^q}$ für $q \in \mathbb{Q}^+$.

Dadurch ist x^q für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $q \in \mathbb{Q}$ definiert.

BEISPIEL 1.17.4. Es ist $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

BEWEIS. Für $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ sind alle x_n positiv. Nach dem Binomischen Lehrsatz ist

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k = 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \dots$$

Daraus folgt für $n \geq 2$

$$n > \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

und

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} > x_n.$$

Also bilden die x_n eine Nullfolge und es ist $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. □

ÜBUNGSAUFGABE 1.17.5 (Übungsaufgabe 31). Konvergiert die Folge $(n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$? Wenn ja, wohin? Hinweis: Erweitern Sie in geeigneter Weise zu einem Bruch.

ÜBUNGSAUFGABE 1.17.6 (Übungsaufgabe 32). Zu einer beliebigen positiven reellen Zahl c sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert, indem für x_0 ein beliebiger positiver Wert gewählt wird, dessen Quadrat größer als c ist und für $n \geq 1$ ist

$$x_n := \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}} \right).$$

Zeigen Sie, dass (x_n) in $\mathbb{R}$ gegen eine Zahl konvergiert, deren Quadrat c ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass alle x_n positiv sind, dass $x_n^2 > c$ ist und danach, dass die Folge monoton fällt. Da die Folge dann konvergiert, können Sie Grenzwertsätze anwenden.

ÜBUNGSAUFGABE 1.17.7 (Übungsaufgabe 33).
Fortsetzung zu den Fibonacci-Zahlen von 1.3.8 (Übungsaufgabe 7): Es sei x_n der Quotient der Fibonacci-Zahlen F_{n+1}/F_n. Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Welche Sätze aus der Vorlesung verwenden Sie dabei?

1.18. Die eulersche Zahl

SATZ 1.18.1. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.*

BEWEIS. Die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist streng steigend, da die Summanden alle positiv sind. Für $k \geq 1$ gilt $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \geq 2^{k-1}$. Mit der Summenformel für geometrische Reihen (siehe Satz 1.7.2) folgt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}<1+2=3.$$

Die Folge der Partialsummen ist also monoton und beschränkt und somit konvergent. □

SATZ 1.18.2. *Die Folge* (x_n) *mit* $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ *ist konvergent.*

BEWEIS. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\,n^k}=$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\leq \tag{1.18.2.1}$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<3,$$

wobei wir im letzten Schritt die Abschätzung im Beweis von Satz 1.18.1 verwendet haben. Die Folge (x_n) ist also beschränkt.

Um Monotonie zu beweisen, folgern wir aus (1.18.2.1)

$$x_{n+1}-x_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

In der ersten Summe schreiben wir den Summanden mit $k=n+1$ separat an und können dann die Summen zusammenfassen und $\frac{1}{k!}$ herausheben:

$$\frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)-\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right)\geq$$

$$\frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)>0.$$

Also ist die Folge (x_n) nicht nur beschränkt, sondern auch streng monoton steigen und folglich konvergent. □

SATZ 1.18.3.

$$\lim s_n=\lim x_n.$$

BEWEIS. Aus der Darstellung von x_n in (1.18.2.1) folgt

$$x_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=s_n\quad\text{und somit}\quad\lim x_n\leq\lim s_n.$$

Ein Verkürzen der Summe in (1.18.2.1) auf $m\leq n$ ergibt

$$x_n\geq 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right).$$

Wird dieser Term als Glied einer Folge mit Index n betrachtet, so konvergiert diese Folge (unter Verwendung der Grenzwertsätzen aus Kapitel 1.16 streng steigend gegen

$$1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}1=1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}=s_m.$$

Das bedeutet $\lim x_n \geq s_m$, woraus $\lim x_n \geq \lim s_n$ folgt. Also ist $\lim x_n = \lim s_n$. □

DEFINITION 1.18.4. Die *eulersche Zahl* ist definiert als

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 1.18.5 (Übungsaufgabe 34).
Im Beweis der Konvergenz der Folge $(x_n) = ((1 + 1/n)^n)$ hilft die Verwendung des binomischen Lehrsatzes, um zu zeigen, dass $\lim x_n = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ ist. Die Monotonie von (x_n) kann auch anders bewiesen werden.

Zeigen Sie $x_n/x_{n-1} > 1$ mit der Ungleichung von Bernoulli für $n \geq 2$. Anmerkung: Für $n \geq 2$ statt $n \geq 0$ und $x > -1$ statt $x \geq -1$ gilt in der Ungleichung von Bernoulli $(1 + x)^n > 1 + nx$ statt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

1.19. Erweiterte reelle Zahlen

DEFINITION 1.19.1. Wenn eine Folge ab einer Stelle größer (bzw. kleiner) als jede beliebig gewählte reelle Zahl ist, nennen wir sie *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ (sprich: "plus Unendlich"), bzw. *bestimmt divergent gegen* $-\infty$ (sprich: "minus Unendlich").

Formal: Wenn (x_n) eine Folge ist und es für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n > x$ bzw. $x_n < x$ ist für alle $n > n_0$, nennen wir (x_n) *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ bzw. *bestimmt divergent gegen* $-\infty$ und schreiben $\lim x_n = +\infty$ bzw. $\lim x_n = -\infty$.

Wenn $\mathbb{R}$ durch die Symbole ∞ und $-\infty$ ergänzt wird, schreibt man $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Wenn $\lim x_n = \infty$ und $\lim y_n \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n - y_n) = \infty.$$

Wenn $\lim y_n > 0$, ist außerdem

$$\lim(x_n y_n) = \lim(x_n/y_n) = \infty.$$

Wenn auch $\lim y_n = \infty$ ist, dann gilt

$$\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n y_n) = \infty.$$

Über das Konvergenzverhalten der Folgen $(x_n - y_n)$ und (x_n/y_n) kann in diesem Fall jedoch im Allgemeinen nichts ausgesagt werden.

Satz 1.19.2 (Grenzwertsatz für rationale Folgen).
Für reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_l$, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$ *ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \ldots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l}, & \textit{falls} \;\; k = l, \\ 0, & \textit{falls} \;\; k < l, \\ \infty, & \textit{falls} \;\; l < k \;\; \textit{und} \;\; \frac{a_k}{b_l} > 0, \\ -\infty, & \textit{falls} \;\; l < k \;\; \textit{und} \;\; \frac{a_k}{b_l} < 0, \end{cases}$$

wobei angenommen wird, dass der Nenner stets ungleich 0 ist.

Beweis. Wenn man aus dem Zähler und dem Nenner jeweils die höchste Potenz heraushebt, wird aus dem obigen Term

$$\frac{n^k}{n^l} \cdot \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \frac{a_{k-2}}{n^2} + \ldots}{b_l + \frac{b_{l-1}}{n} + \frac{b_{l-2}}{n^2} + \ldots}. \tag{1.19.2.1}$$

Wegen Satz 1.16.3.2 (Grenzwert des Produkts) und $\lim \frac{1}{n} = 0$ gilt

$$\lim \frac{1}{n^2} = \left(\lim \frac{1}{n}\right)\left(\lim \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Mit Induktion und Korollar 1.16.4 (konstanter Faktor) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^i} = 0$$

für alle c und $i \geq 1$. Satz 1.16.3.1 (Grenzwert der Summe) impliziert, dass der Zähler des rechten Faktors in 1.19.2.1 gegen a_k und der Nenner gegen b_l strebt. Aus Satz 1.16.6 (Grenzwert des Quotienten) folgt, dass der rechte Faktor gegen $\frac{a_k}{b_l}$ konvergiert.

Für $k = l$ strebt die Folge also gegen $\frac{a_k}{b_l}$. Ist $k < l$, strebt $\frac{n^k}{n^l}$ gegen 0 und die Folge nach Satz 1.16.2 (Nullfolge mal beschränkte Folge) ebenfalls gegen 0.

Wenn $l < k$ ist, geht $\frac{n^k}{n^l}$ gegen ∞. Da der rechte Faktor gegen $\frac{a_k}{b_l}$ strebt, entscheidet das Vorzeichen von $\frac{a_k}{b_l}$, ob die Folge gegen ∞ oder $-\infty$ strebt. □

Übungsaufgabe 1.19.3 (Übungsaufgabe 35). Finden Sie jeweils ein Beispiel für Folgen (x_n) und (y_n) mit $\lim(x_n y_n) = 0$ und
(a) $\lim x_n = \infty$, (b) $\lim x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(c) (x_n) divergent, aber nicht bestimmt diverent.

Übungsaufgabe 1.19.4 (Übungsaufgabe 36). Bestimmen sie die Grenzwerte der Folgen (x_n) mit

$$(1)\; x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k, \quad (2)\; x_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2, \quad (3)\; x_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Recherchieren Sie entsprechende Summenformeln und benutzen Sie diese. Verwenden Sie auch den Grenzwertsatz für rationale Folgen.

1.20. Häufungswerte, Häufungspunkte und isolierte Punkte

Definition 1.20.1. Ein Punkt x heißt *Häufungswert* einer Folge (x_n) in einem metrischen Raum, wenn es für jede Umgebung unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass x_n in der Umgebung liegt.

In einem metrischen Raum X heißt ein Punkt $x \in X$ *Häufungspunkt* einer Menge $D \subset X$, wenn für jede Umgebung U von x die Menge $U \setminus \{x\}$ unendliche viele Elemente von D enthält.

Schulmathematik und Anschauung 1.20.2 (Häufungswerte und Häufungspunkte). Häufungswerte sind für Folgen in einem metrischen Raum und Häufungspunkte für Teilmengen eines metrischen Raumes definiert sind. Während auch konstante Folgen einen Häufungswert haben, ist ein Häufungspunkt etwas, wogegen sich eine Menge von außen hin häuft.

Beispiel 1.20.3. Die Folge $((-1)^n)$ (in $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$) hat zwei Häufungswerte, nämlich -1 und 1. Die Menge der Folgenglieder ist $\{-1, 1\}$, diese Menge hat keinen Häufungspunkt. Die Folge

$$\left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} : \quad 0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$$

hat ebenfalls die Häufungswerte -1 und 1. Die Menge der Folgenglieder ist

$$\left\{\dots, -\frac{5}{6}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots\right\}$$

und hat die Häufungswerte als Häufungspunkte, nämlich -1 und 1.

In $X = \mathbb{R}$ ist die Menge aller Häufungspunkte des offenen Intervalls $(0; 1)$ das abgeschlossene Intervall $[-1; 1]$.

Definition 1.20.4. Eine *Teilfolge* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen ist.

Ein Teilfolge entsteht durch das Weglassen von Gliedern der Folge. Zum Beispiel ist $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ eine Teilfolge von $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Satz 1.20.5. *Ein Punkt eines metrischen Raumes ist genau dann Häufungswert einer Folge, wenn er Grenzwert einer Teilfolge ist.*

Beweis. Dass ein Grenzwert einer Teilfolge ein Häufungswert ist, folgt aus der Definition der Konvergenz (Definition 1.12.2). Umgekehrt, ist x ein Häufungswert, wählen wir für jede Umgebung $U_{1/k}(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$, ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$ und $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da in $U_{1/k}(x)$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ konvergiert gegen x. □

Satz 1.20.6 (Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$).
Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert.

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch a_0 nach unten und durch b_0 nach oben beschränkt. Wir definieren rekursiv

$$[a_{m+1}, b_{m+1}] := \left[a_m, \frac{a_m + b_m}{2}\right],$$

falls $x_n \in [a_m, \frac{a_m+b_m}{2}]$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und anderenfalls

$$[a_{m+1}, b_{m+1}] := \left[\frac{a_m + b_m}{2}, b_m\right].$$

Induktiv wird eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert, die in $([a_m, b_m])_{m\in\mathbb{N}}$ liegt:

Wir setzen $x_{n_0} = x_0$ und wählen ein weiteres Glied der Folge aus $[a_1, b_1]$, das wir mit x_{n_1} bezeichnen. Von den unendlich vielen Gliedern der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in $[a_m, b_m]$ liegen, wählen wir eines, das verschieden von den Folgengliedern x_{n_0}, x_{n_1},$\dots x_{n_{m-1}}$ ist und bezeichnen es mit x_{n_m} und so fort. Die so definierte Folge $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge und liegt in der Intervallschachtelung $([a_m, b_m])_{m\in\mathbb{N}}$. Die dadurch definierte reelle Zahl ist Grenzwert von $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ und somit Häufungswert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Satz 1.20.7 (Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$).
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$ hat einen Häufungswert.

Es sei (z_n) mit $z_n = x_n + iy_n$ eine komplexe beschränkte Folge. Wenn wir wie im Beweis des reellen Falls (Satz 1.20.6) für die Folgen der Realteile (x_n) mit einer Intervallschachtelung zeigen, dass sie einen Häufungspunkt x hat und danach auch für die Folge der Imaginärteile (y_n) mit einer Intervallschachtelung zeigen, dass sie einen Häufungspunkt y hat, kommen wir nicht ans Ziel. Denn eine Teilfolge von (z_n), deren Realteile gegen x konvergieren, muss nicht die Eigenschaft haben, dass ihre Imaginärteile gegen y konvergieren. Die Teilfolge muss also so konstruiert werden, dass gleichzeitig die Realteile gegen x und die Imaginärteile gegen y konvergieren. Statt Intervalle zu halbieren, wählen wir im folgenden Beweis Rechtecke in der gaußschen Zahlenebene, die wir vierteln.

Beweis. Wenn (z_n) beschränkt ist, hat auch die Folgen der Realteile eine untere Schranke a_0 und eine obere Schranke b_0. Genauso sind dir Imaginärteile nach unten und nach oben durch Werte c_0 bzw. d_0 beschränkt. Das heißt, die Folge liegt im Rechteck $[a_0; b_0] \times [c_0; d_0]$. In zumindest einem der Rechtecke

$$\left[a_0; \frac{a_0 + b_0}{2}\right] \times \left[c_0; \frac{c_0 + d_0}{2}\right], \quad \left[a_0; \frac{a_0 + b_0}{2}\right] \times \left[\frac{c_0 + d_0}{2}; d_0\right],$$

$$\left[\frac{a_0 + b_0}{2}; b_0\right] \times \left[c_0; \frac{c_0 + d_0}{2}\right], \quad \left[\frac{a_0 + b_0}{2}; b_0\right] \times \left[\frac{c_0 + d_0}{2}; d_0\right]$$

liegen unendlich viele Glieder der Folge (z_n). Ein solches Rechteck sei $[a_1; b_1] \times [c_1; d_1]$. Nun wird dieses Rechteck wiederum in vier gleich große Rechtecke unterteilt und so weiter. Die Seiten der so erhaltenen Folge von Rechtecken $([a_n; b_n] \times [c_n; d_n])$ bilden Intervallschachtelungen, deren Randpunkte gegen reelle Zahlen x und y konvergieren. Die komplexe Zahl $x + iy$ ist Häufungspunkt der Folge (z_n).

Im $\mathbb{R}^n$ geht der Beweis analog, dabei werden n-dimensionale Quader in 2^n gleich große Teilquader zerlegt. □

Beispiel 1.20.8. Der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt nicht in allen metrischen Räumen. Ein diskreter metrischer Raum (siehe Beispiel 1.11.4) ist beschränkt, denn jeder Punkt hat zu jedem anderen Punkt Abstand 1. Eine Folge unendlich vieler verschiedener Punkte hat keinen Häufungswert, da ein Folge in einem diskreten Raum genau dann konvergiert, wenn sie ab einer Stelle konstant ist.

Es gibt viele Räume, in denen beschränkte Folgen keine Häufungswerte besitzen müssen, wie z.B. viele Folgen- oder Funktionenräume (jeder Punkt des metrischen Raumes ist eine Folge oder eine Funktion).

SATZ 1.20.9. *Eine beschränkte Folge in* $\mathbb{C}$ *oder im* $\mathbb{R}^n$*, die genau einen Häufungswert hat, ist konvergent.*

BEWEIS. Wenn x der einzige Häufungswert einer beschränkten Folge ist, muss jede Umgebung von x fast alle Glieder der Folge enthalten, denn sonst würden die Folgenglieder außerhalb der Umgebung eine beschränkte Folge bilden, die nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen weiteren von x verschiedenen Häufungswert haben müsste. □

BEISPIEL 1.20.10. Satz 1.20.9 gilt nur für beschränkte Folgen, denn die unbeschränkte Folge

$$(n\,(1 + (-1)^n))_{n\in\mathbb{N}} = 0,\, 0,\, 4,\, 0,\, 8,\, 0,\, 12,\, 0,\, 16,\, 0,\, 18, \ldots$$

hat zwar genau einen Häufungswert, ist aber trotzdem nicht konvergent.

SATZ 1.20.11. *Jeder Häufungspunkt der Menge* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *ist Häufungswert der Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BEWEIS. Eine gegen den Häufungswert x konvergente Teilfolge (x_{n_k}) wird induktiv konstruiert: setzen $x_{n_0} = x_0$. Für $k \geq 1$ wählen wir von den unendlich vielen Gliedern der Folge (x_n), die in $(x - 1/k, x + 1/k)$ liegen, eines aus, das verschieden von den Folgengliedern $x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ ist und bezeichnen es mit x_{n_k}. Die so definierte Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x. Also ist der Häufungspunkt x auch Häufungswert der Folge. □

Die Umkehrung der Aussage von Satz 1.20.11 gilt im Allgemeinen nicht, siehe Beispiel 1.20.3.

DEFINITION 1.20.12. Ein *isolierter Punkt* einer Teilmenge D eines metrischen Raumes X ist ein Punkt p für den es in X eine Umgebung gibt, die außer p keinen anderen Punkt von D enthält.

Wenn $p \in D$ isoliert ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(p) \cap D = \{p\}$ ist.

SATZ 1.20.13. *Es sei* D *eine Teilmege eines metrischen Raumes* X*.*

Wenn jede Umgebung eines Punktes $p \in X$ *ein Element von* $D \setminus \{p\}$ *enthält, dann enthält jede Umgebung von* p *unendlich viele Elemente von* D*.*

Ein Punkt einer Teilmenge D *eines metrischen Raumes ist entweder isoliert oder ein Häufungspunkt von* D*.*

BEWEIS. Angenommen für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ enthält $U_{1/n}(p) \setminus \{p\}$ ein Element x_n von D. Wenn die Menge M aller dieser Punkte x_n endlich wäre, dann gäbe es einen kleinsten positiven Abstand dieser Punkte zu p. Dann würde es aber ein m geben, sodass $U_{1/m}(p)\setminus\{p\}$ kein Element aus M enthält. Also muss M unendlich sein und jede Umgebung $U_{1/n}(p)$ enthält unendlich viele Elemente von D. Gleiches gilt für $U_\varepsilon(p)$ für jedes $\varepsilon > 0$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$.

Wenn ein Punkt p von D nicht isoliert ist, heißt das, dass jede seiner Umgebungen einen Punkt von D ungleich p enthält. Wie zuvor gezeigt, enthält dann jede Umgebung von p unendlich viele Elemente von D. Also ist p ein Häufungspunkt von D. $\square$

Übungsaufgabe 1.20.14 (Übungsaufgabe 37).
Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folge

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = \frac{1}{2},\ x_5 = \frac{1}{3},\ x_6 = 1,\ x_7 = \frac{1}{2},\ x_8 = \frac{1}{3},\ x_9 = \frac{1}{4},$$
$$x_{10} = 1,\ x_{11} = \frac{1}{2},\ x_{12} = \frac{1}{3},\ x_{13} = \frac{1}{4},\ x_{14} = \frac{1}{5},\ x_{15} = 1, \ldots$$

Finden Sie zu jedem Häufungswert eine Teilfolge, die gegen ihn konvergiert. Welche Häufungswerte sind Häufungspunkte der Menge aller Folgenglieder und welche sind isolierte Punkte?

KAPITEL 2

Stetigkeit

2.1. Grenzwerte von Funktionen

Zahlen auf der x-Achse werden als *Stellen* bezeichnet (z.B. Nullstelle, Extremstelle, Wendestelle) und Zahlen $f(x)$ auf der y-Achse als *Werte* z.B. Extremwert. *Punkte* haben zwei Koordinaten $(x|f(x))$, z.B. Hochpunkt, Tiefpunkt, Wendepunkt.

Schulmathematik und Anschauung 2.1.1 (Grenzwert einer Funktion). Die Aussage

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

bedeutet: Egal wie sich das Argument x der Stelle p nähert, die entsprechenden Funktionswerte nähern sich dabei immer dem Wert q.

Definition 2.1.2 (Grenzwerte von Funktionen). Es seien X und Y metrische Räume, $D \subset X$, p ein Häufungspunkt von D und $f : D \to Y$. Man schreibt

$$\lim_{x \to p} f(x) = q,$$

wenn für alle Folgen (x_n) in $D \setminus \{p\}$ gilt

$$\lim x_n = p \implies \lim f(x_n) = q.$$

In diesem Fall sagt man, die Funktion hat an der Stelle p den Grenzwert q.

Man beachte, dass p auch außerhalb von D liegen kann und dass der Funktionswert $f(p)$, sofern die Funktion in p definiert ist, in dieser Definition keine Rolle spielt.

Beispiel 2.1.3. Es seien drei Funktionen f_1, f_2, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0, \\ 0 & \text{wenn } x \neq 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } x < 0, \\ 0 & \text{wenn } x = 0, \\ 1 & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

und $f_3 = |x|$, siehe Abbildung 1. Es ist $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0$. Dieser Grenz-

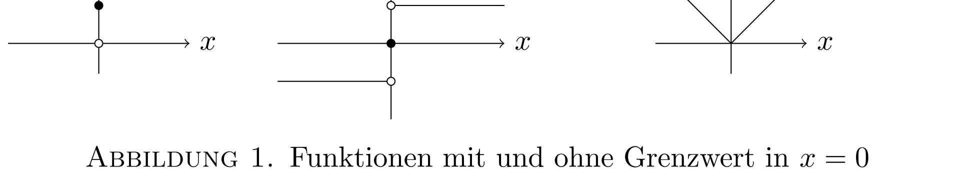

Abbildung 1. Funktionen mit und ohne Grenzwert in $x = 0$

wert ist ungleich dem Funktionswert an der Stelle 0. Der Limes der Vorzeichenfunktion $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ existiert nicht, denn für positive Folgenglieder x_n ist $\lim f(x_n) = 1$, für negative hingegen $\lim f(x_n) = -1$. Für die Betragsfunktion f_3 existiert der Limes an jeder Stelle und er stimmt mit dem Funktionswert an dieser Stelle überein.

Für isolierte Punkte p in X ist $\lim_{x\to p} f(x)$ nicht definiert, da sich bei einem Grenzwert einer Funktion die Annäherung an den Grenzwert p stets von außerhalb (d.h. ungleich p) erfolgen muss, was an isolierten Stellen nicht möglich ist. Im Gegensatz zu den Grenzwerten einer Funktion liegt ein Grenzwert einer Folge auch vor, wenn die Folge ab einer Stelle gleich dem Grenzwert ist.

Definition 2.1.4 (Uneigentliche und einseitige Grenzwerte). Für reelle Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ lassen wir in dieser Definition für p und q die Werte ∞ und $-\infty$ zu, wenn die Folgen entsprechend bestimmt divergieren, siehe Kapitel 1.19, und sprechen dann von *uneigentlichen Grenzwerten* der Funktion.

Wenn nur Folgen (x_n) mit $x_n < p$ (bzw. $x_n > p$) betrachtet werden, sprechen wir vom *linksseiten* (bzw. *rechtsseitigen*) Grenzwert von f an der Stelle p, sofern dieser Grenzwert existiert. Notation: $\lim_{x\to p-} f(x)$ bzw. $\lim_{x\to p+} f(x)$.

Der Grenzwert $\lim_{x\to p} f(x)$ existiert genau dann, wenn $\lim_{x\to p+} f(x)$ und $\lim_{x\to p-} f(x)$ existieren und $\lim_{x\to p+} f(x) = \lim_{x\to p-} f(x)$ ist.

Beispiel 2.1.5. Für $f_1, f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 1/x$ und $f_2(x) = 1/x^2$ existieren folgende uneigentliche Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0-} f_1(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f_1(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} f_2(x) = \infty.$$

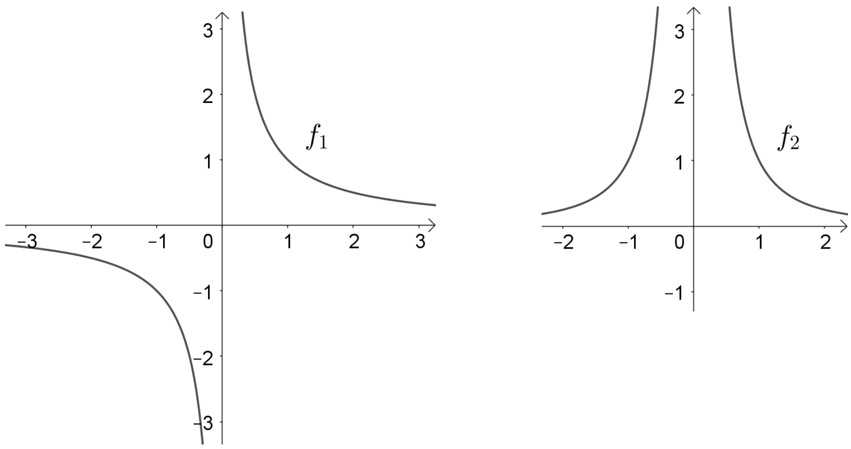

Abbildung 2. Uneigentliche Grenzwerte

Beispiel 2.1.6. Analog zu Satz 1.19.2 seien $a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_l$ Zahlen mit $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots b_lx^l},$$

wobei D die Menge der reellen Zahlen ist, für die obiger Nenner nicht Null ist. Solche Funktionen werden auch *rationale Funktionen* genannt. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l}, & \text{falls } k = l, \\ 0, & \text{falls } k < l, \\ \infty, & \text{falls } l < k \text{ und } \frac{a_k}{b_l} > 0, \\ -\infty, & \text{falls } l < k \text{ und } \frac{a_k}{b_l} < 0. \end{cases}$$

Im Produkt

$$f(x) = x^{k-l} \cdot \frac{a_0 x^{-k} + a_1 x^{1-k} + a_2 x^{2-k} + \ldots + a_k}{b_0 x^{-l} + b_1 x^{1-l} + b_2 x^{2-l} + \ldots + b_l}$$

konvergiert der rechte Faktor in jedem Fall gegen $a_k/b_l \neq 0$. Der linke Faktor konvergiert gegen 0, 1 oder ∞, je nachdem, ob $k - l$ negativ, gleich 0, oder positiv ist. Die Bestimmung der Grenzwerte folgen aus den Grenzwertsätzen aus Kapitel 1.16 bzw. wie in Satz 1.19.2.

Übungsaufgabe 2.1.7 (Übungsaufgabe 38). Es sei $f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2x-1}{3-x}.$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 3+} f(x), \quad \lim_{x\to 3-} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

2.2. Stetigkeit in metrischen Räumen

Schulmathematik und Anschauung 2.2.1 (Stetigkeit). Eine korrekte Veranschaulichung des Stetigkeitsbegriffs ist folgende: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn ihr Graph mit einer (endlich langen) Linie ohne Absetzen von $(a|f(a))$ bis $(b|f(b))$ gezeichnet werden kann.

Es gibt Funktionen (z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ und $f(0)$), die stetig sind, auch wenn ihr Graph nicht zusammenhängend ist. Nur stetige Funktionen, deren Definitionsmenge ein Intervall ist, haben einen zusammenhängenden Graphen, jedoch nicht alle Funktionen auf auf einem Intervall, deren Graph zusammenhängend ist, sind auch stetig, siehe Beispiel 4.11.2.

Es wäre also falsch, zu sagen, eine Funktion sei stetig, wenn ihr Graph keine Löcher hat, oder wenn ihr Graph zusammenhängend ist.

Definition 2.2.2. Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt *stetig an einer Stelle* p, wenn für alle Folgen (x_n) in X mit $\lim x_n = p$ stets $\lim f(x_n) = f(p)$ ist.

Eine Funktion heißt *stetig*, wenn sie an jeder stelle des Definitionsbereichs stetig ist. Eine Funktion ist *unstetig* in einer Stelle, wenn sie an dieser Stelle definiert, aber nicht stetig ist.

Für eine stetige Funktion f sagt man, es können *Grenzwert und Funktion vertauscht* werden, denn es gilt für alle konvergenten Folgen:

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Gleiches lässt sich für den Grenzwert von Funktionen schreiben:

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(\lim_{x\to p} x) = f(p), \quad \text{wobei } p \in X.$$

Satz 2.2.3 (Zusammensetzung stetiger Funktionen). *Es seien X, Y, Z metrische Räume und $g : X \to Y$ und $f : g(X) \to Z$ stetig. Dann ist die Zusammensetztung $f \circ g : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Für eine beliebige konvergente Folge (x_n) in X ist wegen der Stetigkeit von g und f

$$f(g(\lim x_n)) = f(\lim g(x_n)) = \lim f(g(x_n)).$$

Das bedeutet, dass $f \circ g$ stetig ist. □

Beispiel 2.2.4.

(1) Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *konstant*, wenn es ein $c \in Y$ gibt, sodass $f(x) = c$ ist für alle $x \in X$. Jede konstante Funktion zwischen zwei metrischen Räumen ist stetig.
(2) Die Funktion $f : X \to X$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in X$ ist stetig.
(3) In Beispiel 2.1.3 sind die Funktionen f_1 und f_2 unstetig in 0, die Funktion f_3 ist stetig.
(4) Die Funktionen in Beispiel 2.1.5 sind stetig. Es wäre falsch, zu sagen, sie seien unstetig in $x = 0$, denn sie ist dort nicht definiert.

Übungsaufgabe 2.2.5 (Übungsaufgabe 39).
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = d(x_0, x)$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

2.3. Stetigkeit rationaler Funktionen

Satz 2.3.1 (Summe, Produkt und Kehrwert stetiger Funktionen). *Es seien f und g komplexwertige Abbildungen auf einem metrischen Raum, die stetig an einer Stelle p sind. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in p. Ebenso ist die Funktion f/g, die nur für x mit $g(x) \neq 0$ definiert ist, stetig in p.*

Beweis. Der Beweis folgt aus den Grenzwertsätzen aus Kapitel 1.16. Wenn $\lim x_n = p$ ist, folgt aus Satz 1.16.3

$$\lim(f + g)(x_n) = \lim(f(x_n) + g(x_n)) = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = \\ f(p) + g(p) = (f + g)(p).$$

Das bedeutet, dass $f + g$ stetig in p ist. Die Aussagen für $f \cdot g$ und f/g folgen analog. Für den Beweis der Stetigkeit von f/g in p wird die Folge (x_n) natürlich nur aus der Defintionsmenge von f/g gewählt, für alle x_n ist dann also $g(x_n) \neq 0$. □

Definition 2.3.2. Ein *Polynom vom Grad n* ist ein Term

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Liegen die a_k in $\mathbb{R}$, heißt das Polynom reell. Ein *rationaler Term* ist der Quotient zweier Polynome.

Eine *Polynomfunktion vom Grad n* ist eine komplexe oder reelle Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom vom Grad n ist. Die Nullstellen der Polynomfunktion werden *Wurzeln des Polynoms* genannt. Eine *rationale Funktion* ist eine komplexe oder reelle Funktion, deren Funktionsterm ein rationaler Term ist, wobei die Wurzeln des Nennerpolynoms von der Definitionsmenge ausgenommen sind.

SATZ 2.3.3 (Stetigkeit rationaler Funktionen).
Jede rationale Funktion (und somit auch jede Polynomfunktion) ist stetig.

BEWEIS. Die Funktion g mit $g(x) = x$ ist stetig. Nach Satz 2.3.1 ist $g \cdot g$ stetig. Durch Induktion folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ die Funktion $x \mapsto x^n$ stetig ist. Konstante Funktionen ($x \mapsto c$) sind ebenfalls stetig und weil das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, folgt dass die Funktion $x \mapsto cx^n$ stetig ist. Da die Summe stetiger Funktionen stetig ist, sind Polynomfunktionen stetig. Daraus folgt, dass rationale Funktionen stetig sind, weil der Quotient stetiger Funktionen stetig ist, sofern die Nullstellen der Funktion im Nenner aus der Definitionsmenge ausgenommen werden. $\square$

SCHULMATHEMATIK UND ANSCHAUUNG 2.3.4 (Lineare Funktion mit Loch). Folgende Aussage wäre falsch: "Die Funktion $f(x) = (x^2+x)/(x+1)$ ist unstetig in $x = -1$, weil dort der Nenner 0 ist. Wenn jedoch der Bruch auf $f(x) = x$ gekürzt wird, ist die Unstetigkeitsstelle behoben." Das erste Problem ist, dass ein Funktion immer nur zusammen mit ihrer Definitionsmenge definiert ist. Ein Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist eine andere Funktion als eine Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Zum Zweiten ist in beiden Fällen die Funktion stetig.

Unstetigkeit in einer Stelle dadurch zu begründen, dass der Graph einen Sprung macht, ist nur richtig, wenn die Funktion in dieser Sprungstelle auch definiert ist. Man könnte wohl sagen, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0, \\ 1, & \text{wenn } x > 0, \end{cases}$$

einen Sprung macht, sie ist jedoch stetig. Die Vorzeichenfunktion f_2 in Beispiel 2.1.3 ist jedoch unstetig in 0, wie bereits in Beispiel 2.2.4.3 erwähnt wurde.

BEISPIEL 2.3.5. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^k$ für $k \geq 0$ auf $\mathbb{R}$ und für $k < 0$ auf $\mathbb{R}^*$ definiert und nach Satz 2.3.1 in beiden Fällen stetig. Die eulersche Zahl e wurde in Kapitel 1.18 als $\lim(1 + 1/n)^n$ definiert. Weil f stetig ist, gilt $\lim f((1 + 1/n)^n) = f(\lim(1 + 1/n)^n)$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^k = e^k.$$

2.4. Andere Definitionen der Stetigkeit

Die vorliegende Darstellung der Analysis verwendet ausschließlich die Definition der Stetigkeit, die auf der Konvergenz von Folgen beruht (Folgenstetigkeit). Da in in den meisten Texten auch mit anderen Definitionen gearbeitet wird, werden alternative Definitionen nun kurz besprochen.

DEFINITION 2.4.1. Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Das *Urbild* einer Menge $M \subset B$ ist

$$f^{-1}(M) = \{x \in A \mid f(x) \in M\}.$$

Für $y \in B$ schreiben wir $f^{-1}(y)$ statt $f^{-1}(\{y\})$.

Satz 2.4.2. *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) und $p \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Für alle Folgen (x_n) in $X \setminus \{p\}$ gilt*

$$\lim x_n = p \implies \lim f(x_n) = f(p).$$

(Folgenstetigkeit).

(2) *Für jede Umgebung V von $f(p)$ in Y ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von p in X (topologische Stetigkeit).*

(3) *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in X$*

$$d_X(x, p) < \delta \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

(ε-δ-Definition der Stetigkeit).

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Es wird indirekt angenommen, dass (1) erfüllt aber (2) nicht erfüllt ist. Dann gibt es eine Umgebung V von $f(p)$, für die $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von p ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ muss es dann ein $x_n \in U_{1/n}(p) \setminus f^{-1}(V)$ geben (falls $U_{1/n}(p) \subset f^{-1}(V)$, wäre $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von p). Aus $\lim x_n = p$ folgt nach (1) $\lim f(x_n) = f(p)$. Doch wenn die x_n außerhalb von $f^{-1}(V)$ liegen, dann liegen die $f(x_n)$ außerhalb von V im Widerspruch zu $\lim f(x_n) = f(p)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wenn (2) erfüllt ist, dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ das Urbild $f^{-1}(V_\varepsilon(f(p))$ eine Umgebung von p. Folglich gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subset f^{-1}(V_\varepsilon(f(p))$. Daraus folgt $f(U_\delta(p)) \subset V_\varepsilon(f(p))$ und es ist $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ für alle x mit $d_X(x, p) < \delta$. Also gilt (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Angenommen es gilt (3) und $\lim x_n = p$. Dann sei $V_\varepsilon(f(p))$ eine beliebig kleine Umgebung von $f(p)$. Nach (3) gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$d_X(x, p) < \delta \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Das bedeutet

$$f(U_\delta(p)) \subset V_\varepsilon(f(p)).$$

Wegen $\lim x_n = p$ liegt die Folge (x_n) ab einer Stelle in $U_\delta(p)$ und $(f(x_n))$ ab einer Stelle in $f(U_\delta(p))$ und somit in $V_\varepsilon(f(p))$. Das bedeutet $\lim f(x_n) = f(p)$.

Damit haben wir die Implikationskette (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) bewiesen. Das bedeutet, die drei Aussagen sind äquivalent. □

Definition 2.4.3. Es sei X eine beliebige Menge und $A \subset X$. Die Funktion $\mathbf{1}_A : X \to \{0, 1\}$ mit

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A, \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge A auf X.

Beispiel 2.4.4. In Beispiel 2.1.3.1 ist f_1 die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{\{0\}}$ für $X = \mathbb{R}$.

Beispiel 2.4.5. Die rationale Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ mit $X = \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle p unstetig. Denn für jedes $p \in \mathbb{Q}$ gibt es eine Folge (x_n) in $\mathbb{I}$ mit $\lim x_n = p$. Dann ist $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0 \neq 1 = f(p)$. Für jedes $p \in \mathbb{I}$ gibt es eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $\lim x_n = p$ und dann ist $\lim f(x_n) = \lim 1 = 1 \neq 0 = f(p)$.

Um das Kriterium in Satz 2.4.2.2 für $p \in \mathbb{Q}$ anzuwenden, sei $V = (0,5; 1,5)$ eine Umgebung von $f(p) = 1$. Das Urbild $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(V)$ ist $\mathbb{Q}$ und somit keine Umgebung von p in $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass f in p unstetig ist. An irrationalen Stellen p ist $V = (-0,5; 0,5)$ eine Umgebung, deren Urbild keine Umgebung von p ist.

Nach dem Kriterium in Satz 2.4.2.3 ist $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ in einer beliebigen Stelle $p \in \mathbb{R}$ unstetig, weil es zum Beispiel für $\varepsilon = 0,5$ kein geeignetes δ gibt.

Der Funktionsgraph sieht aus wie zwei parallele Geraden mit den Gleichungen $y = 0$ (an den Stellen in $\mathbb{I}$) und $y = 1$ (an den Stellen in $\mathbb{Q}$), die jedoch überall (dicht liegend) Löcher haben.

Beispiel 2.4.6. Wenn X ein diskreter metrischer Raum und Y ein beliebiger metrischer Raum ist, dann ist jede Funktion von X nach Y stetig. Denn wenn (x_n) eine Folge in X ist, die gegen p konvergiert, müssen die Glieder x_n ab einer Stelle gleich p sein und somit alle $f(x_n)$ ab dieser Stelle gleich $f(p)$ sein.

Übungsaufgabe 2.4.7 (Übungsaufgabe 40). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 0, \\ 1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}.$$

(a) Finden Sie eine Umgebung von 1, deren f-Urbild keine Umgebung von 0 ist.
(b) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, für das es kein $\delta > 0$ mit

$$|x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

gibt.
(c) Finden Sie ein Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, für die $(f(x_n))$ nicht gegen $f(0)$ konvergiert.

2.5. Stetige Bilder von Intervallen

Satz 2.5.1 (Zwischenwertsatz). *Eine stetige Abbildung auf einem Intervall nimmt alle Werte zwischen zwei Funktionswerten an.*

Formal: Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(a) \leq f(b)$, dann gibt es für alle $q \in [f(a), f(b)]$ ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = q$.

Falls $f(b) \leq f(a)$ ist, gibt es für alle $q \in [f(b), f(a)]$ ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = q$.

Beweis. Um die Stelle p zu finden, wird eine Intervallschachtelung rekursiv definiert durch $I_0 = [a,b]$ und nach $I_n = [a_n, b_n]$ folgt

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}], & \text{wenn } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq q, \text{ und} \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{wenn } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < q. \end{cases}$$

Somit ist $f(a_n) \leq q \leq f(b_n)$, woraus $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = q$ folgt. Es sei $p = \lim a_n = \lim b_n$ die reelle Zahl, die durch diese Intervallschachtelung definiert ist. Dann ist

$$f(p) = f(\lim a_n) = \lim(f(a_n)) = q \quad \text{und} \quad f(p) = f(\lim b_n) = \lim f(b_n) = q.$$

Für $f(b) \leq f(a)$ führt die gleiche Intervallschachtelung jedoch mit vertauschen Intervallgrenzen ans Ziel. □

Beispiel 2.5.2. Jede reelle Polynomfunktion mit ungeradem Grad hat eine Nullstelle. Formal: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion ungeraden Grades, also

$$f(x) = c_{2n+1}x^{2n+1} + \ldots + c_0$$

mit $c_{2n+1} \neq 0$ und $n \geq 0$. Nach Beispiel 2.1.6 ist $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{n\to-\infty} f(x) = -\infty$, wenn $c_{2n+1} > 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{n\to-\infty} f(x) = \infty$, wenn $c_{2n+1} < 0$. Also gibt es ein Intervall $[a, b]$ mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ oder ein Intervall $[a, b]$ mit $f(b) \leq 0 \leq f(a)$. Nach Satz 2.3.1 ist f stetig, nach dem Zwischenwertsatz existiert daher ein p mit $f(p) = 0$.

Definition 2.5.3. Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn die Bildmenge $f(D)$ beschränkt ist.

Satz 2.5.4. *Eine stetige reellwertige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt und nimmt Supremum und Infimum ihrer Bildmenge an, d.h. sie besitzt ein Minimum und ein Maximum.*
Formal: Wenn $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gibt es $p_1, p_2 \in [a, b]$, sodass $f(p_1) \leq f(x) \leq f(p_2)$ für alle $x \in [a; b]$.

Beweis. Wir definieren $q_2 = \sup f([a; b])$, wobei $q_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es sei (x_n) eine beliebige (nicht notwendigerweise konvergente) Folge in $[a, b]$ mit $\lim f(x_n) = q_2$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 1.20.6 gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es sei $p_2 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Weil f stetig ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(p_2) = q_2.$$

Also ist q_2 ein reelle Zahl (nicht $q_2 = \infty$) und $f(x) \leq f(p_2)$ für alle $x \in [a, b]$.
Für $q_1 := \inf f([a; b])$ läuft der Beweis analog. □

Beispiel 2.5.5. Die folgenden Beispiele zeigen, dass Satz 2.5.4 im Allgemeinen nicht gilt, wenn eine der Voraussetzungen verletzt ist.

(1) Auf dem halboffenen Intervall $(0; 1]$ ist f mit $f(x) = x$ zwar beschränkt, es hat aber die Bildmenge $f((0; 1])$ kein Minimum.
(2) Die Funktion $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{sign}(x) - x$ ist zwar auf einem abgeschlossenen Intervall definiert und beschränkt, es ist $\sup f([0; 1]) = 1$, aber es gibt kein $p \in [0; 1]$ mit $f(p) = 1$. Die Funktion f ist nicht stetig in 0.

Satz 2.5.6. *Das stetige Bild eines Intervalls ist ein Intervall. Das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls ist ein abgeschlossenes Intervall.*

Beweis. Dass das Bild $f(I)$ eines Intervalls I ein Intervall ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz 2.5.1: Angenommen $f(I)$ wäre kein Intervall, dann gäbe es $y_1 < q < y_2$ mit $y_1, y_2 \in f(I)$ und $q \notin f(I)$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es aber ein $p \in I$ geben mit $f(p) = q$. Man beachte, dass Intervalle auch einelementig oder unbeschränkt sein können.

Dass das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall ist, folgt aus Satz 2.5.4. □

Beispiel 2.5.7. Der zweite Teil von Satz 2.5.6 gilt nur für abgeschlossene Intervalle. Das stetige Bild eines offenen Intervalls kann offen oder abgeschlossen sein. Für f_1 mit $f_1(x) = x$ ist jedes Bild eines offenen Intervalls offen.

Wenn $f_2(x) = c$ ist, dann ist das Bild jedes Intervalls $\{c\} = [c, c]$ und somit ein abgeschlossenes Intervall.

Es sei der Graph $f_3 : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ stückweise linear zwischen den Punkten mit den Koordinaten $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 0)$, also

$$f_3(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für } -2 < x \leq -1, \\ -x & \text{für } -1 < x \leq 1, \\ x - 2 & \text{für } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Dann ist f_3 stetig und $f_3((-2, 2)) = [-1, 1]$.

2.6. Umkehrfunktion monotoner Funktionen

Definition 2.6.1. Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *surjektiv*, wenn $f(A) = B$ ist, *injektiv*, wenn das Urbild $f^{-1}(y)$ aller Elemente $y \in f(A)$ genau ein Element hat und *bijektiv*, wenn die Funktion surjektiv und injektiv ist.

Eine Funktion f ist also injektiv, surjektiv bzw. bijektiv, wenn $f^{-1}(y)$ für alle $y \in B$ höchstens ein, mindestens ein bzw. genau ein Element hat. In Beweisen ist oft folgende Definition der Injektivität vorteilhaft:

$$\text{Für alle } \; x_1,\, x_2 \in A \; \text{ gilt: } \; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definition 2.6.2. Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt *monoton steigend* (bzw. *fallend*), wenn

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

für alle x_1, $x_2 \in D$. Gilt $<$ statt $\leq$ bzw. $>$ statt $\geq$, dann ist f *streng* monoton steigend (bzw. fallend).

Definition 2.6.3. Für eine Menge A bezeichnen wir mit id_A die Identität $A \to A$ mit $x \mapsto x$. Wenn $f : A \to B$, $g : f(A) \to A$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, dann nennen wir g *Umkehrabbildung von* f und schreiben f^{-1} statt g.

Eine Abbildung f hat genau dann eine Umkehrabbildung, wenn sie injektiv ist. Wenn $f : A \to B$ injektiv ist, dann ist $f : A \to f(A)$ bijektiv. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist ebenfalls bijektiv. Die Abbildung f ist auch die Umkehrabbildung von f^{-1}. Es ist $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(A)}$, bzw. $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in f(A)$.

Jede streng monotone reelle Funktion ist injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion.

Satz 2.6.4. *Die Umkehrfunktion einer streng monoton steigenden (bzw. fallenden) reellen Funktion ist streng monoton steigend (bzw. fallend).*

Beweis. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng steigend. Das bedeutet

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

Für f^{-1} und $y_1, y_2 \in f(D)$ mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ folgt

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \iff y_1 < y_2.$$

Also ist auf f^{-1} streng monoton steigend. Für streng fallende Funktionen läuft der Beweis analog. □

Satz 2.6.5. *Eine stetige Abbildung auf einem (beliebigen) Intervall hat genau dann eine Umkehrabbildung (bzw. ist injektiv), wenn sie streng monoton ist.*

Beweis. Jede Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I, die streng monoton ist, ist injektiv.

Angenommen f ist injektiv und stetig. Wir nehmen indirekt an, f sei nicht streng monoton. Dann gibt es $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ mit $f(x_1) \leq f(x_2)$ und $f(x_2) \geq f(x_3)$ oder mit $f(x_1) \geq f(x_2)$ und $f(x_2) \leq f(x_3)$. Im ersteren Fall gibt es für jedes $q \in [f(x_1), f(x_2)] \cap [f(x_3), f(x_2)]$ nach dem Zwischenwertsatz Punkte p_1, p_2 mit $x_1 < p_1 < x_2 < p_2 < x_3$ und $f(p_1) = f(p_2) = q$, was im Widerspruch zur Injektivität von f steht. Im zweiten Fall folgt Gleiches für $q \in [f(x_2), f(x_1)] \cap [f(x_2), f(x_3)]$. □

Satz 2.6.6. *Die Umkehrabbildung einer stetigen reellen Funktion auf einem Intervall ist stetig.*

Formal: Es sei I ein beliebiges (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und existiert eine Umkehrabbildung f^{-1}, dann ist diese stetig auf $f([a; b])$.

Beweis. Nach Satz 2.6.5 ist f streng monoton. Es sei $y \in f(I)$ und (y_n) in $f(I) \setminus \{y\}$ eine beliebige gegen y konvergente Folge. Es ist zu zeigen, dass $(f^{-1}(y_n))$ gegen $f^{-1}(y)$ konvergiert.

Die Menge Y aller Folgenglieder (y_n) hat genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert y.

Es sei $Y^- = \{y_n \mid y_n < y\}$ und $Y^+ = \{y_n \mid y_n > y\}$. Da alle $y_n \neq y$ sind, ist $Y = Y^- \cup Y^+$. Die Menge Y^- hat, wenn sie nicht leer ist, ein kleinstes Element a_0, ein zweitkleinstes Element a_1 etc. Die so definierte Folge (a_n) ist entweder endlich, oder sie konvergiert streng steigend gegen y. Genauso kann Y^+ als streng fallende endliche oder unendliche Folge angeordnet werden.

Die Urbildfolgen $(f^{-1}(a_n))$ bzw. $(f^{-1}(b_n))$ sind wegen der strengen Monotonie wieder streng monoton. Ist eine solche Urbildfolge fallend, ist sie nach unten durch $f^{-1}(y)$ beschränkt, ist sie steigend, dann ist sie nach oben durch $f^{-1}(y)$ beschränkt, in jedem Fall sind sie nach Satz 1.13.6 konvergent, wenn sie unendlich sind. Da f stetig ist und sich daher mit dem Limes vertauschen lässt, gilt

$$f(\lim f^{-1}(a_n)) = \lim f(f^{-1}(a_n)) = \lim a_n = y,$$

sofern (a_n) unendlich ist. Gleiches gilt für (b_n). Daraus folgt

$f(\lim f^{-1}(y_n)) = y$ und durch Anwendung von f^{-1} $\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$

für alle Folgen (y_n) in $f(I) \setminus \{y\}$, die gegen y konvergieren. Also ist f^{-1} in einer beliebigen Stelle y stetig. $\square$

Beispiel 2.6.7. Wenn $f : X \to Y$ eine injektive stetige Funktion zwischen zwei metrischen Räumen ist, dann muss die Umkehrabbildung nicht immer stetig sein. Es sei $f : [0;1) \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion, die das halboffene Einheitsintervall bijektiv auf eine geschlossene Kurve (z.B. einen Kreis oder ein Quadrat) abbildet. Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $y_{2n} = f(1/n)$ und $y_{2n-1} = f(1 - 1/n)$ konvergiert gegen $f(0)$. Doch $(f^{-1}(y_n))$ konvergiert in $[0;1)$ nicht, diese Folge häuft sich sowohl gegen 0 als auch gegen 1. Folglich ist f^{-1} nicht stetig.

Übungsaufgabe 2.6.8 (Übungsaufgabe 41). Wie Beispiel 2.6.7 zeigt, ist folgender Satz falsch:
Satz. *Es sei $f : X \to Y$ eine stetige injektive Funktion zwischen zwei metrischen Räumen. Dann ist auch f^{-1} stetig.*

Beweis. Es sei (y_n) eine beliebige konvergente Folge in $f(X)$. Zu zeigen ist, dass $\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(\lim y_n)$ ist. Es sei $x_n := f^{-1}(y_n)$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$ und somit

$$f^{-1}(f(\lim x_n)) = f^{-1}(\lim f(x_n)) \quad \text{bzw.}$$
$$\lim x_n = \lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(\lim y_n).$$

Letztere Gleichheit war zu zeigen. $\square$

Wo liegt der Fehler in diesem "Beweis"? Erörtern Sie den Fehler anhand des Beispiels 2.6.7 oder eines anderen Beispiels.

2.7. Potenzen mit reellen Exponenten

In Definition 1.17.3 wurden Potenzen x^r mit $x \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{Q}$ definiert. Außerdem wurde 0^0 als 1 definiert. Die Existenz der Potenzen wurde in Satz 1.17.2 aus der Supremumseigenschaft der reellen Zahlen abgeleitet. Es gelten dieselben Rechenregeln wie für ganzzahlige Exponenten.

Satz 2.7.1 (Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten). *Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten:*
(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
(2) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,
(3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

Beweis. (1) Die rationalen Zahlen r und s können als ganzzahlige Brüche m_r/n und m_s/n mit gleichem Nenner geschrieben werden. Die Gleichung

$$a^r \cdot a^s = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m_r} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m_s} = (a^{1/n})^{m_s + n_s} = a^{r+s}$$

folgt dann aus den Rechenregeln für ganzzahlige Exponenten.

(2) Für $r = m/n$ ist

$$a^r \cdot b^r = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^m = (a \cdot b)^r.$$

(3) Mit $s = m/n$ ist

$$(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^r}\right)^m = \left(a^{r/n}\right)^m = a^{r \cdot m/n} = a^{r \cdot s}.$$

$\square$

Potenzen mit negativen Basen lassen sich nur für ganzzahlige Exponenten sinnvoll definieren, für rationale Exponenten würden die Rechenregeln nicht gelten. Zum Beispiel wäre $((-1)^2)^{1/2} = 1$ etwas anderes als $(-1)^{2\cdot 1/2} = -1$ und $((-1)^{1/2})^2$ wäre als reelle Zahl gar nicht definiert.

Satz 2.7.2 (Monotonieeigenschaften für Potenzen mit rationalen Exponenten).

(1) *Für alle* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ *und* $r \in \mathbb{Q}^+$ *gilt*

$$x_1^r < x_2^r \iff x_1 < x_2.$$

(2) *Für alle* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ *und* $r \in \mathbb{Q}^-$ *gilt*

$$x_1^r > x_2^r \iff x_1 < x_2.$$

(3) *Für alle* $a \in \mathbb{R}^+$ *und* $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ *gilt*

$$a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2, \quad \textit{falls } a > 1,$$

(4) *und*

$$a^{x_1} > a^{x_2} \iff x_1 < x_2, \quad \textit{falls } a < 1.$$

Mit Ausnahme der Potenz 0^r in der ersten Aussage sind alle Basen aus $\mathbb{R}^+$. Alle Exponenten sind rational. Werden x_1 und x_2 als Werte einer Variablen x aufgefasst, beschreiben die Aussagen (1) bis (4) das Monotonieverhalten von Funktionen f, beispielsweise mit (1) $f(x) = x^2$ oder $f(x) = \sqrt{x}$, (2) $f(x) = 1/x$, (3) $f(x) = 1,1^x$, (4) $f(x) = 0,9^x$.

Beweis. (1) Die erste Aussage lässt sich mit $r = m/n$, $m, n \in N^*$, als

$$(\sqrt[n]{x_1})^m < (\sqrt[n]{x_2})^m \iff x_1 < x_2$$

anschreiben und somit auf $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} \iff x_1 < x_2$ zurückführen, was mit Induktion gezeigt werden kann.

(2) Der zweite Punkt folgt durch Bildung des Kehrwerts aus dem ersten.

(3) Wir schreiben $x_1 = m_1/n$ und $x_2 = m_2/n$ als ganzzahlige Brüche mit gemeinsamem Nenner $n \in \mathbb{N}^*$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Wenn $a > 1$ folgt $\sqrt[n]{a} > 1$. Es ist dann $m_1 < m_2$ äquivalent zu

$$a^{x_1} = (\sqrt[n]{a})^{m_1} < (\sqrt[n]{a})^{m_2} = a^{x_2}.$$

(4) Wenn $0 < a < 1$ ist $\sqrt[n]{a} < 1$ und $m_1 < m_2$ ist äquivalent zu

$$a^{x_1} = (\sqrt[n]{a})^{m_1} > (\sqrt[n]{a})^{m_2} = a^{x_2}.$$

□

Beispiel 2.7.3. Für alle $c > 0$ ist $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Beweis. Es sei $c > 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $c < n$. Nach (2.7.2.1) gilt $\sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{n}$. Nach Beispiel 1.17.4 strebt $\sqrt[n]{n}$ gegen 1. Aus

$$1 < \sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{n}$$

folgt mit mit dem Sandwich-Theorem 1.16.5, dass $\lim \sqrt[n]{c} = 1$ ist.

Für $0 < c < 1$ ist $1/c > 1$. Wie zuvor folgt $\lim \sqrt[n]{1/c} = 1$. Nach den Grenzwertsatz 1.16.6 für Quotienten ist

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{c}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{c}} = 1$$

und somit $\lim \sqrt[n]{c} = 1$. □

SATZ 2.7.4. *Es seien* (x_n) *und* (y_n) *rationalen Folgen, die in* $\mathbb{R}$ *gegen denselben Grenzwert streben und* $a \in \mathbb{R}^+$. *Dann konvergieren* (a^{x_n}) *und* (a^{y_n}) *und es ist* $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n}$.

BEWEIS. Für $a = 1$ ist $a^{x_n} = a^{y_n} = 1$ und es ist nichts zu zeigen.

Ist $a > 1$, dann sei c eine rationale obere Schranke der Folge (x_n). Ist $a < 1$, dann sei c eine rationale untere Schranke der Folge (x_n). Nach Satz 2.7.2 (Monotonieeigenschaften) gilt in beiden Fällen $a^{x_n} < a^c$ für alle n.

Für alle $N \in \mathbb{N}^*$ gibt es ein n_0, sodass $|x_m - x_n| < \frac{1}{N}$ ist für alle m, $n \geq n_0$. Dann ist wegen der Wahl von c und wegen Satz 2.7.1 (Rechenregeln)

$$|a^{x_m} - a^{x_n}| = a^{x_n} \cdot |a^{x_m - x_n} - 1| < a^c \cdot |a^{1/N} - 1|.$$

Nach Satz 1.16.2 ist das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge eine Nullfolge, daher ist $(a^c \cdot |a^{1/N} - 1|)_{N \in \mathbb{N}^*}$ eine Nullfolge. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N_0, sodass auch $|a^{x_m} - a^{x_n}| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N_0$. Daher ist $(a^{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent.

Es ist $(y_n - x_n)$ eine Nullfolge und wegen der Monotonie der Potenzen für jedes N ab einer Stelle

$$a^{-\frac{1}{N}} < a^{y_n - x_n} < a^{\frac{1}{N}}.$$

Nach dem Sandwich-Theorem ist $\lim a^{y_n - x_n} = 1$. Daher ist

$$|a^{y_n} - a^{x_n}| = a^{x_n} \cdot |a^{y_n - x_n} - 1|$$

das Produkt einer beschränkten Folge mit einer Nullfolge und somit nach Satz 1.16.2 eine Nullfolge. Somit ist $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n}$. □

Satz 2.7.4 ermöglicht auch die Definition von Potenzen mit irrationalen Exponenten:

DEFINITION 2.7.5. Es sei $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine rationale Folge mit $\lim x_n = x$, dann definieren wir

$$a^x := \lim a^{x_n}.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = a^x$ heißt *Exponentialfunktion* mit Basis $a \in \mathbb{R}^+$.

SATZ 2.7.6. *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

BEWEIS. Für rationale Folgen x_n gilt nach Definition der Exponentialfunktion, was für alle Folgen zu zeigen ist, nämlich

$$a^{\lim x_n} = \lim a^{x_n}. \tag{2.7.6.1}$$

Dies ist nun auch für beliebige reelle Folgen zu zeigen. Es sei $y \in \mathbb{R}$ und (y_n) eine beliebige reelle Folge, die gegen y konvergiert. Zu jedem y_n gibt es eine rationale Zahl r_n mit $|y_n - r_n| < \frac{1}{n}$ und nach Definition 2.7.5 eine rationale Zahl s_n mit $|a^{y_n} - a^{s_n}| < \frac{1}{n}$. Es sei x_n jene der beiden Zahlen r_n und s_n, die näher bei y_n liegt. Formal: $x_n = r_n$, falls $|y_n - r_n| \leq |y_n - s_n|$, sonst $x_n = s_n$. In jedem Fall gilt nun

$$|y_n - x_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |a^{y_n} - a^{x_n}| < \frac{1}{n}.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $\lim x_n = y$, aus der zweiten Ungleichung $\lim a^{y_n} = \lim a^{x_n}$. Letzterer Limes ist gleich $a^{\lim x_n} = a^y$, woraus $\lim a^{y_n} = a^y$ folgt. □

Satz 2.7.7. *Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*
(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
(2) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
(3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Beweis. Es seien (x_n) und (y_n) rationale Folgen mit $\lim x_n = x$ und $\lim y_n = y$. In den folgenden Argumentationen werden die Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten (Satz 2.7.1) sowie (2.7.6.1) verwendet.
(1) $a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim(a^{x_n} \cdot a^{y_n}) = \lim(a^{x_n+y_n}) = a^{x+y}$.
(2) $a^x \cdot b^x = \lim a^{x_n} \cdot \lim b^{x_n} = \lim(a^{x_n} \cdot b^{x_n}) = \lim(a \cdot b)^{x_n} = (a \cdot b)^x$.
(3) $(a^x)^y = (a^{\lim_{m\to\infty} x_m})^{\lim_{n\to\infty} y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a^{x_m})^{y_n} =$

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a^{x_m \cdot y_n}) = a^{x \cdot y}.$$

□

Mit a^{b^c} ist immer $a^{(b^c)}$ gemeint, nicht $(a^b)^c$. Das Potenzieren ist nicht assoziativ. Zum Beispiel ist $2^{(1^2)} = 2$ und $(2^1)^2 = 4$.

Satz 2.7.8 (Monotonie und Grenzverhalten der Exponentialfunktion). *Für Basen $a > 1$ ist die Exponentialfunktion streng monoton steigend,* $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Für $a \in (0; 1)$ ist die Exponentialfunktion streng fallend, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ *und* $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$.

Beweis. Es seien x_1, x_2 reelle Zahlen mit $x_1 < x_2$ und $a > 1$. Zu zeigen ist $a^{x_1} < a^{x_2}$, was nach Satz 2.7.7 äquivalent zu $1 < a^{x_2-x_1}$ ist. Wenn (r_n) eine positive rationale gegen $x_2 - x_1$ steigende Folge ist, gilt nach Satz 2.7.2.3

$$1 < a^{r_n} \leq a^{\lim r_n} = a^{x_2-x_1}.$$

Aus der bestimmten Divergenz der Folge (a^n) gegen ∞, also $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, folgt wegen der eben gezeigten Monotonie die bestimmte Divergenz der Exponentialfunktion $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$. Genauso folgt $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ aus $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$.

Für $0 < a < 1$ folgt aus $x_1 < x_2$ und wegen $a^{-1} > 1$ nach den Rechenregeln aus Satz 2.7.7

$$(a^{-1})^{x_1} < (a^{-1})^{x_2} \iff a^{-x_1} < a^{-x_2} \iff a^{x_2} < a^{x_1}.$$

Außerdem gilt für $0 < a < 1$ nach dem, was wir soeben gezeigt haben,

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \left(a^{-1}\right)^x = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} \left(a^{-1}\right)^x = \infty.$$

□

Satz 2.7.9. *Die Exponentialfunktion $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = a^x$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist bijektiv.*

Beweis. Injektivität folgt aus der strengen Monotonie nach Satz 2.7.8. Für jedes $q \in \mathbb{R}^+$ gibt es wegen der Limeseigenschaften aus Satz 2.7.8 einen Funktionswert, der größer als q ist und einen Funktionswert, der kleiner als q ist. Da die Exponentialfunktion nach Satz 2.7.7 stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz 2.5.1, dass es $p \in \mathbb{R}$ mit $f(p) = q$ gibt. Also ist die Exponentialfunktion auch surjektiv und somit bijektiv. □

SATZ 2.7.10. *Es gilt* $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ *bzw. für alle Nullfolgen* (x_n) *in* $\mathbb{R}^*$ *ist* $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

BEWEIS. Da Nullfolgen in $\mathbb{R}^*$ betrachtet werden, kann $0 < |x_n| < 1$ vorausgesetzt werden, denn das Streichen eines endlichen Anfangsstücks der Folge beeinflusst das Konvergenzverhalten nicht.

Zuerst wird nur der Fall betrachtet, dass alle $x_n > 0$ sind. Es sei k_n jene natürliche Zahl, für die gilt:

$$\frac{1}{k_n+1} \le x_n < \frac{1}{k_n} \quad \text{bzw.} \quad k_n < \frac{1}{x_n} \le k_n + 1.$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. Aus den Monotonieeigenschaften der Potenzen folgt

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \iff$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n})^{k_n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1} = e$ und $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ konvergieren die linke und die rechte Seiten der letzten Ungleichung für $n \to \infty$ gegen e. Daher muss auch $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$ sein.

Für beliebige Folgen (x_n) sei (a_n) die Teilfolge aller negativen Folgenglieder (sofern eine solche existiert).

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^{-\frac{1}{a_n}} = \left(\left(1+\frac{-a_n}{1+a_n}\right)^{\frac{1+a_n}{-a_n}}\right)^{\frac{1}{1+a_n}}.$$

Da $\left(\frac{-a_n}{1+a_n}\right)$ eine positive Nullfolge ist, gilt, was wir schon zuvor gezeigt haben und es ist $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$. □

ÜBUNGSAUFGABE 2.7.11 (Übungsaufgabe 42). Es sei f eine reelle Funktion mit $f(x) = c\cdot a^x$, $f(-1) = 16$ und $f(1,5) = 121,5$. Berechnen Sie a und c ohne Technologie.

ÜBUNGSAUFGABE 2.7.12 (Übungsaufgabe 43). Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2-1}\right)^{1-n^2}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.7.13 (Übungsaufgabe 44). Der hyperbolische Kosinus und der hyperbolische Sinus sind definiert durch

$$\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Der Graph des hyperbolischen Kosinus hat die Gestalt einer durchhängenden Kette oder eines Seils und spielt somit in technischen Anwendungen eine wichtige Rolle. Für diese hyperbolischen Winkelfunktionen lässt sich leicht zeigen, dass $\cosh x + \sinh x = e^x$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ist. Zeigen Sie die folgenden Summenformeln:

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh x \cosh y.$$

2.8. Der Logarithmus

Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist die Exponentialfunktion eine stetige (2.7.6) streng monotone (2.7.8) Bijektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (2.7.9).

Definition 2.8.1. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißt *Logarithmus zur Basis* a und wird mit $\log_a$ bezeichnet.

Statt $\log_e$ wird ln (logarithmus naturalis) und statt $\log_{10}$ wird lg verwendet. In der reinen Mathematik wird gerne log statt ln und im technischen oder physikalischen Bereich log statt lg geschrieben. Auch wird ld (dualer Logarithmus) gelegentlich statt $\log_2$ verwendet.

Satz 2.8.2. *Für $a > 1$ ist $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend, $\lim_{x\to 0+} \log_a(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$.*

Für $0 < a < 1$ ist $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ streng fallend, $\lim_{x\to 0+} \log_a(x) = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$.

Für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und x, $y \in \mathbb{R}^+$ gelten folgende Rechenregeln:
(1) $\log_a a^x = x$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
(2) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
(3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
(4) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
(5) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

Beweis. (1) Dass $\log_a a^x = x$ ist, entspricht der Definition des Logarithmus zur Basis a als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit Basis a. Also folgt $\log_a 1 = 0$ aus $a^0 = 1$ und $\log_a a = 1$ aus $a^1 = a$.

Die Regeln (2) und (4) folgen aus den Punkten (1) und (3) in Satz 2.7.7.

Wegen $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ folgt Regel (3) aus den Regeln (2) und (4)

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y.$$

Regel (5) folgt aus Regel (4):

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x} \iff \log_a\left(x^{\log_a y}\right) = \log_a\left(y^{\log_a x}\right) \iff$$
$$\log_a y \cdot \log_a x = \log_a x \cdot \log_a y.$$

Das Anwenden des Logarithmus auf eine Gleichung ist ein Äquivalenzumformung, da er injektiv ist. □

Schulmathematik und Anschauung 2.8.3 (Funktionen und Äquivalenzumformungen). Wenn $T_1(x) = T_2(x)$ eine Gleichung mit $T_1(x), T_2(x) \in D$ ist und f eine auf D definierte injektive Funktion ist, dann ist die Gleichung äquivalent zu $f(T_1(x)) = f(T_2(x))$, was bedeutet, dass die Gleichungen dieselbe Lösungsmenge haben. Das Anwenden einer Injektion ist also eine Äquivalenzumformung einer Gleichung.

Für Ungleichungen ist das Anwenden einer streng monotonen Funktion eine Äquivalenzumformung, streng steigende Funktionen lassen das Relationszeichen unverändert, streng fallende drehen es um.

Für $x \geq 0$ ist $x < 2$ äquivalent zu $x^2 < 2^2$, denn $f : x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend. Für $x \in \mathbb{R}$ ist das Quadrieren hingegen keine Äquivalenzumformung.

Aus der Schule ist die Regel bekannt, dass das Multiplizieren mit einer Zahl $c < 0$ das Relationszeichen umdreht. Diese Multiplikation entspricht dem Anwenden der streng fallenden Funktion $f : x \mapsto cx$.

BEISPIEL 2.8.4. In Abbildung 2 sind die Graphen der Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \ln x$, $f_3(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $f_4(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$ sowie die 1. Mediane mit der Gleichung $y = x$.

Graphen von Umkehrfunktionen entstehen immer durch Spiegelung an der 1. Mediane. Daher ist der Graph von f_2 das Spiegelbild des Graphen von f_1 und der Graph von f_4 das Spiegelbild des Graphen von f_3. Wegen $f_1(-x) = f_3(x)$ entsteht der Graph von f_3 durch Spiegelung des Graphen von f_1 an der y-Achse und wegen $-f_2(x) = f_4(x)$ entsteht der Graph von f_4 durch Spiegelung des Graphen von f_2 an der x-Achse.

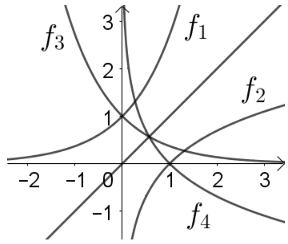

ABBILDUNG 3. Exponential- und Logarithmusfunktionen

BEISPIEL 2.8.5. Nach Beispiel 1.17.4 ist $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$. Wegen Regel 2.8.2.4 und weil Logarithmen $\log_a$ stetig sind, folgt für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\lim \frac{\log_a n}{n} = \lim \log_a n^{\frac{1}{n}} = \lim \log_a \sqrt[n]{n} = \log_a \lim \sqrt[n]{n} = \log_a 1 = 0.$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.8.6 (Übungsaufgabe 45). Lösen Sie folgende Gleichungen für $x \in \mathbb{R}^+$.

$$(a) \quad (\lg x)^2 + 3 = \lg x^4 \qquad (b) \quad x^{\frac{\lg x - 3}{2}} = 100$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.8.7 (Übungsaufgabe 46). Leiten Sie aus

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1/2} = 3 \quad \text{die Ungleichung} \quad \frac{5}{8} < \ln 2 < \frac{6}{8} \quad \text{ab.}$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.8.8 (Übungsaufgabe 47). Ist die Folge $(x_n)_{n \geq 2}$ konvergent oder bestimmt divergent und gegebenenfalls wohin?

$$\text{(a)} \quad x_n = \frac{2^{\ln n}}{n^2}, \qquad \text{(b)} \quad x_n = \ln 2 + \ln(\ln n) - 2 \ln n.$$

KAPITEL 3

Ableitung

3.1. Definition der Ableitung

Wenn $f : X \to Y$ eine Funktion ist, für welche Art von Räumen X und Y macht dann der Ausdruck

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Sinn? Subtraktion und Division sind in Körpern als Umkehrung von Addition und Multiplikation definiert. Es muss $X = Y$ sein, denn die Argumente t und x stehen zusammen mit $f(t)$ und $f(x)$ im selben Term. Damit dieser Grenzwert an jeder Stelle x existieren kann, muss x ein Häufungspunkt der Grundmenge sein. Interessant ist dieser Grenzwert also für Körper, die als metrische Räume vollständig sind. Für uns sind das $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Definition 3.1.1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und x ein Häufungspunkt von D. Der *Differenzialquotient* an der Stelle x ist

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Die Funktion f ist *differenzierbar* in x, wenn dieser Grenzwert existiert. Der Wert $f'(x)$ heißt auch *Ableitung von f an der Stelle x*. Die Funktion heißt *differenzierbar*, wenn sie in allen Punkten von D differenzierbar ist. Die Funktion $f' : D \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt *Ableitung von f*. Das Bestimmen einer Ableitungsfunktion heißt *differenzieren.*

Man schreibt f'' statt $(f')'$, f''' statt $(f'')'$ usw. oder $f^{(0)}$ statt f, $f^{(1)}$ statt f', $f^{(2)}$ statt f'' usw. bezeihungsweise $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

So wie die Grenzwertsätze für Folgen (Kapitel 1.16) nicht nur in $\mathbb{R}$ sondern auch in $\mathbb{C}$ gelten, so gelten auch Ableitungsregeln gleichermaßen für komplexe wie für reelle Funktionen. Wenn eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jedoch in der Form

$$f(z) = \mathrm{Re}(f(z)) + i \cdot \mathrm{Im}(f(z))$$

angeschrieben wird, also f in Real- und Imaginärteil zerlegt wird, dann ist Vorsicht geboten. Die Ableitung von f kann nämlich nur dann aus den Ableitungen von $\mathrm{Re}(f(z))$ und $\mathrm{Im}f((z))$ gewonnen werden, wenn die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differetialgleichungen erfüllt sind, was jedoch über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgeht. Die Summe zweier differenzierbarer Funktionen ist stets differenzierbar, jedoch sind Real- und Imaginärteil einer Funktion im allgemeinen nicht differenzierbar, siehe 3.1.7.

Wenn man sich die Frage stellt, ob man mit reellen oder komplexen Funktionen arbeiten will, ist außerdem zu beachten, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist und $\mathbb{C}$ nicht. Dies betrifft das Konzept der Monotonie, das nur für reelle Funktionen Sinn macht, aber auch Hoch- und Tiefpunkte. Natürlich können Beträge komplexer Zahlen maximal bzw. minimal sein, aber Beträge selbst sind wiederum reelle Zahlen.

Definition 3.1.2. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$. Wenn $[t; x] \subset D$ ist, dann ist die Gerade (als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$) durch die Punkte $(t|f(t))$ und $(x|f(x))$ die *Sekante* über dem Intervall $[t; x]$. Ihre Steigung

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

heißt *Differenzenquotient*.

Wenn $f'(x)$ existiert, ist die *Tangente* an f an der Stelle x die Gerade mit der Steigung $f'(x)$, die durch den Punkt $(x|f(x))$ geht.

Eine Schreibweise, die zur Berechnung des Differentialquotienten oft nützlich ist, erhält man für $h = t - x$ bzw. $t = x + h$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

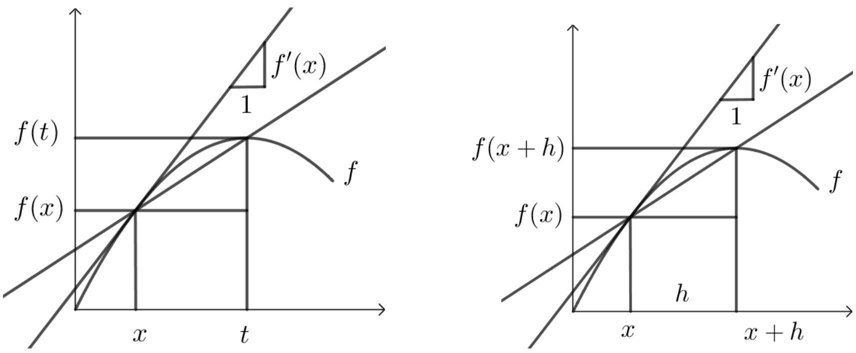

Abbildung 1. Sekante und Tangente

Wenn eine Funktion f nur durch den Term ihrer Zuordnungsvorschrift gegeben ist, also zum Beispiel $r^2 s + t$, und nicht klar ist, welcher Buchstabe die Variable ist, dann macht es Sinn, die Variable in der Ableitungsfunktion f' zu spezifizieren. Man schreibt dann

$$\frac{df}{ds} \quad \text{bzw.} \quad \frac{df}{dt},$$

um die entsprechende Ableitungsfunktion zu bezeichnen. Diese Notation ist in der Physik gängig, wo mit den Symbolen ds und dt oft gerechnet wird, als wären es reelle Zahlen, auch wenn es sich dabei um Differenzen handelt, die im Zuge eines Grenzübergangs gegen Null gehen.

Beispiel 3.1.3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 7x - 1$. An der Stelle $x = 2$ ist $f(2) = -3$ und

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2 + h)^2 - 7(2 + h) - 1 + 3}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{12 + 12h + 3h^2 - 14 - 7h + 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 5) = 5.$$

Allgemein gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 7(x+h) - 1 - (3x^2 - 7x - 1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 7x - 7h - 1 - 3x^2 + 7x + 1}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 7h}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h - 7) = 6x - 7.$$

Schulmathematik und Anschauung 3.1.4 (Berechnung des Differenzialquotienten).
Rechnungen wie in 3.1.3 finden sich nach wie vor in der Schulmathematik, auch wenn sie im Rahmen der zentralen Reifeprüfung durch Kompetenzen abgelöst wurden, bei denen das Verstehen des Differentialquotienten im Sachkontext oder in Bezug zum Verlauf des Funktionsgraphen im Vordergrund stehen.

Der Differentialquotient ist definiert als Quotient zweier Terme, die beide gegen Null streben. Die Strategie beim Berechnen des Grenzwertes ist es, den Zähler so umzuformen, dass der Nenner gekürzt werden kann.

Satz 3.1.5. *Ist eine komplexe Funktion differenzierbar an einer Stelle, dann ist sie dort auch stetig.*

Beweis. Wenn f differenzierbar in x ist, gilt

$$\lim_{t\to x} (f(t) - f(x)) = \lim_{t\to x} \left(\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \right) =$$

$$\lim_{t\to x} \left(\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right) \lim_{t\to x}(t - x) = f'(x) \cdot 0 = 0$$

und somit $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$. Daher ist f stetig in x. □

Beispiel 3.1.6. Die Umkehrung von Satz 3.1.5 ist nicht richtig, nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar. Die Graph der reellen Betragsfunktion ist in Beispiel 2.1.3.3 abgebildet. Sie ist stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn für $t < 0$ ist

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = -1 \quad \text{und für } t > 0 \text{ ist} \quad \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 1.$$

Daher existiert der Limes $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$ nicht. Geometrisch kann das so interpretiert werden, dass der Graph der Betragsfunktion in $(0|0)$ keine eindeutige Tangente besitzt, weil er dort einen spitzen Knick hat.

Übungsaufgabe 3.1.7 (Übungsaufgabe 48). Wenn eine komplexe Folge konvergiert, dann konvergiert die Folge der Realteile der Folgenglieder gegen den Realteil des Grenzwerts, siehe 1.16.3.1. Das bedeutet, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ stetig ist. Zeigen Sie, dass f nicht differenzierbar ist. Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass f in 0 nicht differenzierbar ist, indem Sie zwei Nullfolgen finden, für die die Differenzenquotienten nicht gegen denselben Wert konvergieren.

3.2. Ableitungen von Polynomfunktionen

Im Folgenden seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen mit $D \subset \mathbb{C}$ und c sei eine beliebige komplexe Zahl.

(1) *Konstantenregel.* Für eine konstante Funktion f mit $f(x) = c$ ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

(2) *Regel vom konstanten Faktor.* Die Funktion cf mit $cf : x \mapsto cf(x)$ ist differenzierbar und es ist $(cf)' = c \cdot f'$, denn

$$(cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) + cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h} = cf'(x).$$

Dass der konstante Faktor aus dem Grenzwert herausgehoben werden kann, folgt aus Korollar 1.16.4.

(3) *Potenzregel.* Für x, $y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ x^4 - y^4 &= (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

und allgemein für $n \in \mathbb{N}^*$

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1},$$

was mit vollständiger Induktion bewiesen werden kann. Für $n \in \mathbb{N}^*$ und f mit $f(x) = x^n$ ist

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \lim_{y\to x} \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

(4) *Summenregel.*

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Dass hier der Limes einer Summe als Summe zweier Limiten geschrieben werden kann, gilt nach Satz 1.16.3.1.

Mit diesen Regeln können Polynomfunktionen differenziert werden:

Satz 3.2.1. *Für Polynomfunktionen f mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

und komplexen Zahlen $a_n, \ldots, a_0$ gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1.$$

Beispiel 3.2.2. Es sei f eine reelle Polynomfunktion mit

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3.$$

Es soll die Gleichung der Tangente t an den Graphen an der Stelle $x = 1$ bestimmt werden: Aus $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ und $f'(1) = 3 - 8 + 4 = -1$ folgt

$$t : y = -x + d,$$

wobei d noch zu bestimmen ist. Es ist $f(1) = 1 - 4 + 4 + 3 = 4$ und weil der Punkt $(1|f(1)) = (1|4)$ auf der Tangente liegt, gilt $4 = -1 + d$ und $d = 5$, also

$$t : y = -x + 5.$$

Übungsaufgabe 3.2.3 (Übungsaufgabe 49). Es sei f eine reelle Polynomfunktion mit $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen an der Stelle $x = p$, also eine Gleichung in x, y und p. Zur Überprüfung ihrer Lösung können Sie den Graphen der Funktion und die Tangente in Geogebra mit einem Schieberegler für p zeichnen.

3.3. Potenz-, Produkt und Quotientenregel

Satz 3.3.1 (Produktregel). *Es seien f und g differenzierbare Funktionen $D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$. Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar und*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Beweis.

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))g(x)}{h} =$$

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

wobei wir im letzten Schritt $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ verwenden, was gilt, weil f in x stetig ist und die Stetigkeit aus der Differenzierbarkeit folgt, siehe Satz 3.1.5. □

Für drei differenzierbare Funktionen f_1, f_2, f_3 folgt durch wiederholtes Anwenden der Produktregel

$$(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 (f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'.$$

Für vier Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 ist

$$(f_1 f_2 f_3 f_4)' = f_1' f_2 f_3 f_4 + f_1 f_2' f_3 f_4 + f_1 f_2 f_3' f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4'.$$

Satz 3.3.2 (Erweiterte Produktregel). *Es seien f_1, f_2, $f_3, \dots f_n$ differenzierbare Funktionen $D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$. Dann ist $\prod_{k=1}^n f_k = f_1 \cdot f_2 \dots f_n$ differenzierbar und*

$$\left(\prod_{k=1}^n f_k \right)' = f_1' \cdot f_2 \dots f_n + f_1 \cdot f_2' \dots f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \dots f_n' = \sum_{k=1}^n f_k' \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_i.$$

Beweis. Die Aussage $A(n)$ des Satzes wird mit Induktion gezeigt. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, $A(2)$ ist die Produktregel (Satz 3.3.1), $A(3)$ und $A(4)$ wurden zuvor exemplarisch angeschrieben.

Aussage $A(n+1)$ kann aus $A(n)$ mit der Produktregel abgeleitet werden:

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} f_k\right)' = \left(\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right) \cdot f_{n+1}\right)' =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k' \prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} f_i\right) \cdot f_{n+1} + \left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right) \cdot f_{n+1}' = \sum_{k=1}^{n+1} f_k' \prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n+1} f_i.$$

□

Satz 3.3.3 (Quotientenregel). *Es seien f und g differenzierbare Funktion $D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist f/g differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Beweis.

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} + \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} =$$

$$-\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Mit der Produktregel folgt

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

Satz 3.3.4 (Potenzregel für rationale Exponenten).
Für $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{Q}^*$ ist $f'(x) = rx^{r-1}$.

Beweis. Zunächst sei $r > 0$. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $r = n/m$ und es gilt

$$x^r - y^r = x^{\frac{n}{m}} - y^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}\right) \sum_{k=1}^{n} x^{\frac{n-k}{m}} y^{\frac{k-1}{m}}$$

und für $r = 1$ bzw. $m = n$ erhalten wir

$$x - y = \left(x^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}\right) \sum_{k=1}^{m} x^{\frac{m-k}{m}} y^{\frac{k-1}{m}}.$$

Daraus folgt

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{x^r - y^r}{x - y} = \lim_{y\to x} \frac{\sum_{k=1}^{n} x^{\frac{n-k}{m}} y^{\frac{k-1}{m}}}{\sum_{k=1}^{m} x^{\frac{m-k}{m}} y^{\frac{k-1}{m}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x^{\frac{n-1}{m}}}{\sum_{k=1}^{m} x^{\frac{m-1}{m}}} =$$

$$\frac{nx^{\frac{n-1}{m}}}{mx^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1-m+1}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} = rx^{r-1}.$$

Der $r < 0$ kann durch Bildung des Kehrwerts auf den ersten Fall zurückgeführt und danach die Ableitung mit der Quotientenregel (Satz 3.3.3) bestimmt werden:

$$(x^r)' = \left(\frac{1}{x^{-r}}\right)' = -\frac{-rx^{-r-1}}{x^{-2r}} = rx^{r-1}.$$

□

Beispiel 3.3.5. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist stetig, jedoch nur auf $\mathbb{R}^*$ differenzierbar mit

$$f'(x) = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Für $x = 0$ existiert der Differentialquotient

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

nicht. Der Graph der Funktion ist in $x = 0$ senkrecht, die Steigung der Tangente ist anschaulich gesprochen unendlich groß. Die Umkehrfunktion mit $f^{-1}(x) = x^3$ hat in $x = 0$ eine waagrechte Tangente. Der Graph von f^{-1} ist das Spiegelbild des Graphen von f an der 1. Mediane. Gleiches gilt für die Tangenten im Nullpunkt.

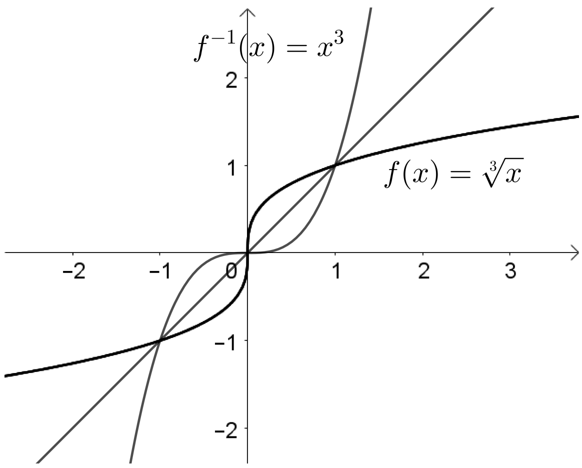

Abbildung 2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ und $f^{-1}(x) = x^3$

Übungsaufgabe 3.3.6 (Übungsaufgabe 50). Berechnen Sie $f'(x)$ für $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}^*$ und

$$f(x) = \frac{x^r - 1}{x^r + 1}.$$

3.4. Kettenregel und Sekantensteigungen

Satz 3.4.1 (Kettenregel). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : f(D) \to \mathbb{R}$. Wenn f und g differenzierbar sind, dann ist die Zusammensetzung $g \circ f$ differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Schön wäre ein einfacher Beweis der Form

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{t \to x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{f(t) - f(x)} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} =$$

$$\lim_{t \to x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{f(t) - f(x)} \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = g'(f(x))f'(x).$$

Leider ist dieser "Beweis" falsch, denn $f(t) - f(x)$ könnte gleich 0 sein. Es könnte f eine konstante Funktion sein, und natürlich soll die Kettenregel auch für stückweise konstante Funktionen gelten. Für einen korrekten Beweis wird ein Hilfsmittel benötigt:

Definition 3.4.2. Es sei $g : D \to \mathbb{R}$ eine an der Stelle $p \in D$ differenzierbare Funktion. Die Steigungen der Sekanten, die durch die Punkte $(p|g(p))$ und $(x|g(x))$ gehen, sind

$$g_p^*(x) = \frac{g(p) - g(x)}{p - x} \quad \text{mit} \quad x \neq p.$$

In p wird der Wert der Tangentensteigung ergänzt: $g_p^*(p) := g'(p)$.

Für festes p und variables x wird dadurch eine *Sekantensteigungsfunktion* $g_p^* : D \to \mathbb{R}$ definiert, die in p stetig ist, denn es ist $\lim_{x \to p} g_p^*(x) = g'(p)$, weil g in p differenzierbar ist. Aus $g_p^*(x)(p - x) = g(p) - g(x)$ folgt

$$g(x) = g(p) - g_p^*(x)(p - x).$$

Die Tangentengleichung an der Stelle p ist

$$y = g(p) - g'(p)(p - x)$$

und entspricht einer lokalen linearen Approximation von g. Die Gleichung einer Sekante auf einem Intervall $[a; b]$ mit $a \neq b$ kann folgendermaßen angeschrieben werden:

$$y = g(a) - g_a^*(b)(a - x) = g(a) - \frac{g(a) - g(b)}{a - b}(a - x),$$

$$y = g(b) - g_b^*(a)(b - x) = g(b) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(b - x) \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{g(a) - g(b)}{a - b} x + \frac{ag(b) - bg(a)}{a - b}.$$

Beweis von Satz 3.4.1.

$$(g \circ f)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{g_p^*(f(x))(f(x) - f(p))}{x - p} =$$

$$\lim_{x \to p} g_p^*(f(x)) \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = g'(f(p))f'(p).$$

□

Das Symbol dx findet in der Integralrechnung in der Form $\int f(x)dx$ Verwendung. Es steht für Differenzen, die gegen 0 streben. Diese Notation bezieht sich zunächst nicht auf eine Funktion, sondern auf einen Term, in dem x vorkommt. Dieser Term wird dann in unserem Sinn als Funktion in x aufgefasst. In der Physik wird mit solchen Symbolen oft gerechnet wie mit Zahlen. Für den "Beweis" der Kettenregel würden Physiker zunächst statt der Funktionsbezeichnungen f, g Termbezeichnungen wählen, zum Beispiel

$z(y(x))$, wobei z als Term (Funktion) in y und y als Term (Funktion) in x gesehen wird. Das dx-Rechenkalkül ergibt dann

$$z'(y)y'(x) = \frac{dz}{\cancel{dy}}\frac{\cancel{dy}}{dx} = \frac{dz}{dx} = z'(x),$$

wobei das Symbol dy so weggekürzt wird, als wäre es eine Zahl.

Übungsaufgabe 3.4.3 (Übungsaufgabe 51). Bestimmen Sie eine möglichst große Definitionsmenge $D \in \mathbb{R}$ und die Ableitung von $f : D \to \mathbb{R}$, sofern diese existiert. Stellen Sie den Term der Ableitungsfunktion ohne Brüche in den Exponenten und ohne negative Exponenten dar.

$$\text{(a) } f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}, \quad \text{(b) } f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x-1}, \quad \text{(c) } f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Übungsaufgabe 3.4.4 (Übungsaufgabe 52). Stellen Sie die den Funktionsterm der Ableitung von f mit

$$f(x) = (x+1)^8(x+2)^{16}(x+3)^{24}$$

als Produkt von Linearfaktoren dar. Ob f als reelle oder komplexe Funktion betrachtet wird, spielt dabei keine Rolle.

Übungsaufgabe 3.4.5 (Übungsaufgabe 53). Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in und $P(X = k) = p_k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Die *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* f ist definiert durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k.$$

Für den Erwartungswert gilt

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k p_k = f'(1).$$

Die Varianz ist definiert als $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Es gilt

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) =$$
$$E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} (k-1)kp_k x^{k-2}$$

$$f''(1) = \sum_{k=2}^{n} (k-1)kp_k = \sum_{k=2}^{n} k^2 p_k - \sum_{k=2}^{n} kp_k =$$
$$= E(X^2) - p_1 - (E(X) - p_1) = E(X^2) - E(X).$$

Daraus folgt

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = f''(1) + f'(1)(1 - f'(1)).$$

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable $X \sim B_{n,p}$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Stellen Sie den Funktionsterm der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion der Binomialverteilung mithilfe des binomischen Lehrsatzes ohne Summenzeichen dar und berechnen sie mit der ersten und der zweiten Ableitung den Erwartungswert und die Varianz.

3.5. Ableitung von Umkehrfunktionen, Logarithmus-, Exponential- und Potenzfunktionen

SATZ 3.5.1. *Es sei f eine reelle auf einem Intervall I stetige, streng monotone und in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion. Ist $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

BEWEIS.

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \left(\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right)^{-1} =$$

$$\left(\lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right)^{-1} = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Um die Existenz der Limiten in diesem Beweis zu begründen, wird die Gleichungskette von hinten nach vorne gelesen. □

SATZ 3.5.2. *Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $x > 0$ ist*

$$\log_a' x = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Insbesondere gilt

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

BEWEIS.

$$\log_a' x = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Wie in Satz 3.5.1 wird die Existenz des ersten Grenzwerts gezeigt, indem die Gleichungskette von hinten nach vorne gelesen wird. Die zweite Aussage folgt aus $\ln e = 1$. □

SATZ 3.5.3. *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $(e^x)' = e^x$.*

BEWEIS. Für $f(x) = e^x$ und $f^{-1}(y) = \ln y$ gilt nach den Sätzen 3.5.1 und 3.5.2:

$$(e^x)' = f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)} = \frac{1}{1/y} = y = f(x) = e^x.$$

□

SATZ 3.5.4. *Für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ ist $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$.*

BEWEIS.

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x.$$

□

SATZ 3.5.5. *Für* $x \in \mathbb{R}^+$ *und* $a \in \mathbb{R}$ *ist* $(x^a)' = a\, x^{a-1}$.

BEWEIS.

$$(x^a)' = \left(e^{a \ln x}\right)' = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}.$$

□

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.6 (Übungsaufgabe 54). Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Ableitung einer reellen Funktion f mit

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x} \qquad \text{(b)} \quad f(x) = x\sqrt{x^2+1}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.7 (Übungsaufgabe 55). Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Ableitung einer reellen Funktion f mit

$$\text{(a)} \quad f(x) = 2^{\ln(\ln x)} \qquad \text{(b)} \quad f(x) = x^x.$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.8 (Übungsaufgabe 56). Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Ableitung einer reellen Funktion f mit

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x^n}{n!} \ \text{ für } \ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \ln\sqrt{x+1}.$$

3.6. Ableitung und Extremstellen

DEFINITION 3.6.1. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Ein $p \in D$ heißt *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum* von f, wenn es eine ε-Umgebung U von p gibt, sodass $f(p) \geq f(x)$ bzw. $f(p) \leq f(x)$ für alle $x \in U \cap D$. Das Minimum bzw. Maximum heißt *streng*, wenn $f(p) > f(x)$ bzw. $f(p) < f(x)$ für alle $x \in U \cap D$.

Die Stelle p heißt *(globales) Maximum* bzw. *(globales) Minimum* von f, wenn $f(p) \geq f(x)$ bzw. $f(p) \leq f(x)$ für alle $x \in D$.

Ein $p \in D$ ist genau dann ein lokales Maximum bzw. Minimum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(p) \geq f(x)$ bzw. $f(p) \leq f(x)$ gilt für alle $x \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon) \cap D$. Ist $D = [a; b]$ können auch die Randpunkte a und b lokale Extremstellen sein. Jede globale Extremstelle ist auch eine lokale Extremstelle.

SCHULMATHEMATIK UND ANSCHAUUNG 3.6.2 (Lokale Extremstellen). In Schulbüchern kursieren einige falsche Definitionen von lokalen Extremstellen. Eine Fehlerquelle ist die, dass angenommen wird, dass es ein wie zuvor erwähntes Intervall $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ geben müsse, dass ganz in D sei. Dass bedeutet, wenn D ein Intervall ist, dann könne es lokale Extremstellen nur im Inneren von D und nicht an den Randpunkten geben.

Woher kommt dieses Missverständnis? Die Definition lokaler Extremstellen kann auch folgendermaßen lauten: "Ein $p \in D$ heißt *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum* von f, wenn es eine Umgebung U in D gibt, sodass $f(p) \geq f(x)$ bzw. $f(p) \leq f(x)$ gilt für alle $x \in U$." In diesem Fall muss

U jedoch als Umgebung im metrischen Raum D gemeint sein und nicht als Umgebung im metrischen Raum $\mathbb{R}$. Für $D = [0;1]$ ist $U = [0;0,1)$ eine Umgebung von $p = 0$ in D, jedoch ist $[0;0,1)$ in $\mathbb{R}$ keine Umgebung von $p = 0$.

Die falsche Annahme, dass eine lokale Extremstelle im Inneren eines Definitionsintervalls liegen müsse, steht vielleicht auch im Zusammenhang mit dem Wunsch, dass eine reelle differenzierbare Funktion in jeder lokalen Extremstelle p die Ableitung $f'(p) = 0$ hat. Ein solcher Zusammenhang besteht tatsächlich nur, wenn die zusätzliche Annahme getroffen wird, dass die Extremstelle im Inneren eines Definitionsintervalls liegt, siehe Satz 3.6.3 und Beispiel 3.6.4.

Die erwähnte problematische schulmathematische Definition lässt sich nicht konsistent in die höhere Mathematik implementieren. Denn für beliebige Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen muss definiert werden können, was es bedeutet, dass ein $p \in X$ eine lokale Extremstelle ist. Ein solche Definition, die der oben erwähnten schulmathematischen Lesart entspricht, müsste dann einen weiteren metrischen Raum Z ins Spiel bringen, in dem X eingebettet ist.

Es seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \sqrt{x}$ und $f_2(x) = 0$. Dann hat f_1 in $p = 0$ ein lokales und eine globales Minimum und für f_2 ist jedes $p \in \mathbb{R}^+$ sowohl lokales als auch globales Minimum. Nach der zuvor erwähnten schulmathematischen Definition hätte f_1 ein globales Minimum in $p = 0$, jedoch keine lokale Extremstelle. Für f_2 wäre jedes $p \in \mathbb{R}^+$ globales

Eine weitere ungeeignete Definition von lokalen Extremstellen geht von einem Monotoniewechsel der Funktion in einer lokalen Extremstelle aus. Doch selbst wenn D ein Intervall ist und selbst wenn f differenzierbar ist, kann an einer Stelle p im Inneren des Intervalls D eine lokale Extremstelle p vorliegen, an der es keinen Monotoniewechsel gibt, selbst wenn $f'(p) = 0$ ist. Mehr dazu in Beispiel 4.11.3.

Satz 3.6.3. *Es sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, $p \in (a;b)$ eine lokale Extremstelle und f differenzierbar in p. Dann ist $f'(p) = 0$.*

Beweis. Es sei p ein lokales Maximum. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in (p - \varepsilon; p + \varepsilon)$. Für $x \in (p - \varepsilon; p)$ ist

$$f'(p) = \lim_{x \to p-} \frac{f(p) - f(x)}{p - x} \geq 0$$

und für $x \in (p; p + \varepsilon)$ ist

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(p) - f(x)}{p - x} \leq 0.$$

Daraus folgt $f'(p) = 0$. Im Fall dass p ein lokales Minimum ist, läuft der Beweis analog. □

Satz 3.6.3 kann mit demselben Beweis allgemeiner für eine lokale Extremstelle $p \in D$ formuliert werden, an die sich sowohl von links als auch von rechts Folgen in D annähern können, also für einen Punkt p, der sowohl Häufungspunkt von $D \cap [p; \infty)$ als auch Häufungspunkt von $D \cap (-\infty; p]$ ist.

Beispiel 3.6.4. Auf keine der Voraussetzungen in Satz 3.6.3 kann verzichtet werden. Für $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist $p = 0$ eine lokale Extremstelle, jedoch ist $f'(0) = 1$ und nicht $f'(0) = 0$. Für $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist $p = 0$ eine Extremstelle im Inneren des Definitionsintervalls, doch ist f in $p = 0$ nicht differenzierbar.

Satz 3.6.5 (Satz von Rolle). *Ist $f : [a; b]$ stetig, auf $(a; b)$ differenzierbar und ist $f(a) = f(b)$, dann gibt es eine lokale Extremstelle $p \in (a; b)$ und $f'(p) = 0$.*

Beweis. Ist f konstant, also $f(x) = f(a) = f(b)$ für alle x, dann folgt die Aussage des Satzes sofort. Da f stetig ist, nimmt f nach Satz 2.5.4 sowohl Maximum als auch Minimum an. Wenn f nicht konstant ist, muss zumindest einer dieser Extremwerte ungleich $f(a) = f(b)$ sind, die entsprechende Extremstelle p liegt im Inneren des Definitionsintervalls. Nach Satz 3.6.3 ist $f'(p) = 0$. □

Satz 3.6.6 (Mittelwertsatz). *Ist $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a; b)$ differenzierbar, dann gibt es ein $p \in (a; b)$ mit*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Es sei $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann ist g ebenfalls stetig auf $[a; b]$ und differenzierbar auf $(a; b)$ und es gilt $g(a) = g(b) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 3.6.5) gibt es ein $p \in (a; b)$ und $g'(p) = 0$. Also ist

$$g'(p) = f'(p) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{und} \quad f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Schulmathematik und Anschauung 3.6.7 (Mittelwertsatz). Geometrisch interpretiert besagt der Mittelwertsatz, dass es (unter den notwendigen Voraussetzungen) zu einer Sekante auf einem Intervall eine Tangente zu einer Stelle im inneren des Intervalls gibt, die dieselbe Steigung hat.

In physikalischen Anwendungen bedeutet der Mittelwertsatz, dass es zu jedem Zeitintervall einen Zeitpunkt in diesem Intervall gibt, an dem die momentane Änderungsrate genau der mittleren Änderungsrate über dem Intervall entspricht.

Satz 3.6.8. *Wenn $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 0$ ist für alle $x \in [a; b]$, dann ist f konstant.*

Beweis. Für alle x_1, x_2 mit $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ gibt es ein $p \in (x_1; x_2)$ mit

$$f'(p) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

woraus $x_1 = x_2$ folgt. □

Satz 3.6.9. *Es sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = cf(x)$ für alle $x \in [a; b]$, dann gibt es ein $d \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = de^{cx}$ ist.*

Beweis. Die Aussage ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dass $f(x)e^{-cx}$ konstant ist. Aus $f'(x) = cf(x)$ folgt

$$\big(f(x)e^{-cx}\big)' = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = 0$$

Nach Satz 3.6.8 ist $f(x)e^{-cx} = d$ für ein $d \in \mathbb{R}$. Somit ist $f(x) = de^{cx}$. □

Übungsaufgabe 3.6.10 (Übungsaufgabe 57). Bestimmen Sie für die reelle Polynomfunktion f mit $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ jene Stellen in $(0; 3)$ an denen die Tangentensteigung gleich der Steigung der Sekante auf $[0; 3]$ ist.

Übungsaufgabe 3.6.11 (Übungsaufgabe 58). Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - e^x - e^{-x}}{x},$$

ohne die Regel von de l'Hospital zu verwenden.

3.7. Monotonie, höhere Ableitungen und Extremstellen

Satz 3.7.1. *Ist f auf $[a; b]$ stetig und auf $(a; b)$ differenzierbar, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \ \textit{für alle}\ x \in (a; b) &\iff f \ \textit{ist monoton steigend.}\\
f'(x) \leq 0 \ \textit{für alle}\ x \in (a; b) &\iff f \ \textit{ist monoton fallend.}\\
f'(x) > 0 \ \textit{für alle}\ x \in (a; b) &\implies f \ \textit{ist streng monoton steigend.}\\
f'(x) < 0 \ \textit{für alle}\ x \in (a; b) &\implies f \ \textit{ist streng monoton fallend.}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.7.2. Aus der strengen Monotonie folgt nicht, dass die erste Ableitung größer als Null ist. Zum Beispiel ist die reelle Polynomfunktion f mit $f(x) = x^3$ überall streng monoton steigend, obwohl $f'(0) = 0$ ist.

Beweis von Satz 3.7.1. Wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$, $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a; b)$, folgt für alle x_1, x_2 in $[a; b]$ mit $x_1 < x_2$ aus dem Mittelwertsatz (3.6.6), dass es ein $p \in (x_1; x_2)$ gibt mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(p).$$

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(p) \geq 0 \quad (\text{bzw. } \leq 0,\ > 0,\ < 0).$$

Daraus folgt $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ und $f(x_2) \geq f(x_1)$ (bzw. ≤ 0, > 0, < 0) für alle x_1, x_2 in $[a; b]$ mit $x_1 < x_2$. □

Satz 3.7.3. *Ist $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ stetig in p und $f(p) > 0$, dann gibt es eine δ-Umgebung $(p - \delta; p + \delta)$, sodass $f(x) > 0$ ist für alle x aus dieser δ-Umgebung.*

Beweis. Nach den alternativen Stetigkeitsdefinitionen (Satz 2.4.2.2 und 3) gibt es für die Umgebung $(0; 2f(p))$ von $f(p)$ eine δ-Umgebung $(p-\delta; p+\delta)$ von p, sodass

$$f((p - \delta; p + \delta)) \subset (0; 2f(p))$$

ist. Das bedeutet, dass $f(x) > 0$ ist für alle $x \in (p - \delta; p + \delta)$. □

Schulmathematik und Anschauung 3.7.4 (Stetigkeit: Umgebung einer Stelle). In Satz 3.7.3 wird aus einer Aussage an einer einzelnen Stelle eine Aussage über einen umliegenden Bereich abgeleitet.

Der Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall ist wie ein von links nach rechts verlaufendes Gummiband. Wenn es durch einen Punkt $(p|f(p))$ oberhalb der x-Achse läuft, muss es unter diesem Punkt auf der x-Achse ein Intervall geben, das unterhalb des Graphen liegt.

Satz 3.7.5. *Ist $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in p, dann gilt:*

$$f'(p) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{ist streng monoton steigend in einer } \varepsilon\textit{-Umgebung von } p.$$
$$f'(p) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{ist streng monoton fallend in einer } \varepsilon\textit{-Umgebung von } p.$$

Beweis. Es sei $f'(p) > 0$. Nach Satz 3.7.3 gibt es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(p)$ von p, sodass $f'(x) > 0$ ist für alle $x \in U_\varepsilon(p)$. Nach Satz 3.7.1 ist f in dieser Umgebung streng steigend.

Der Fall $f'(p) < 0$ wird analog bewiesen. □

Satz 3.7.6. *Es sei $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in p.*

$$f'(p) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{hat ein striktes lokales Minimum in } p.$$
$$f'(p) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{hat ein striktes lokales Maximum in } p.$$

Beispiel 3.7.7. Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Wenn ein striktes lokales Maximum bzw. Minimum vorliegt, muss die zweite Ableitung nicht kleiner bzw. größer als 0 sein, wie das Beispiel der Funktion f mit $f(x) = x^4$ an der Stelle $p = 0$ zeigt.

Beweis von Satz 3.7.6. Es sei $f''(p) > 0$. Nach Satz 3.7.3 gibt es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(p)$ von p, sodass $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in U_\varepsilon(p)$. Nach Satz 3.7.1 ist f' in dieser Umgebung streng steigend.

Wegen $f'(p) = 0$, ist im Fall $f''(x) > 0$ die Funktion f' auf $(p - \varepsilon; p)$ negativ und auf $(p; p + \varepsilon)$ positiv. Nach Satz 3.7.5 ist f auf $(p - \varepsilon; p)$ streng fallend und auf $(p; p+\varepsilon)$ streng steigend. Daher hat f in p ein striktes lokales Minimum.

Der Fall $f''(p) < 0$ wird analog bewiesen. □

Definition 3.7.8. Es sei $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in p und $f'(p) = 0$. Wenn p keine Extremstelle ist, heißt p *Sattelstelle* bzw. $(p|f(p))$ heißt *Sattelpunkt*.

Satz 3.7.9. *Es sei $n \geq 3$, $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar in p und $f^{(1)}(p) = f^{(2)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p) = 0$.*

$$f^{(n)}(p) > 0 \quad \textit{und } n \textit{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{hat ein striktes lokales Minimum in } p.$$
$$f^{(n)}(p) < 0 \quad \textit{und } n \textit{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{hat ein striktes lokales Maximum in } p.$$
$$f^{(n)}(p) \neq 0 \quad \textit{und } n \textit{ ungerade} \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{hat eine Sattelstelle in } p.$$

Beweis. Wenn $f^{(n)}(p) > 0$ ist, hat $f^{(n-2)}$ nach Satz 3.7.6 in p ein striktes lokales Minimum. Außerdem ist $f^{(n-2)}(p) = 0$. Es gibt also eine Umgebung $(p - \delta; p + \delta)$ von p, sodass $f^{(n-2)}(x) > 0$ ist für alle $x \in U \setminus \{p\}$.

Daraus folgt, dass $f^{(n-3)}$ in U streng steigend ist und in p eine Sattelstelle hat, außerdem ist nach Voraussetzung $f^{(n-3)}(p) = 0$. Also ist $f^{(n-3)}$ auf $(p - \delta; 0)$ negativ und auf $(0; p + \delta)$ positiv.

Daher ist $f^{(n-4)}$ auf $(p - \delta; 0)$ streng fallend und auf $(0; p + \delta)$ streng steigend, wobei $f^{(n-4)}(p) = 0$ ist. Es folgt, dass $f^{(n-4)}$ in p ein striktes Minimum hat.

Diese Argumentation setzt sich bis $f^{(0)} = f$ fort. Ob f nun ein striktes lokales Minimum oder eine Sattelstelle hat, hängt davon ab, ob n gerade oder ungerade ist.

Für den Fall $f^{(n)}(p) < 0$ läuft die Argumentation analog. □

Übungsaufgabe 3.7.10 (Übungsaufgabe 59). (a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

und bestimmen Sie damit lokale und globale Extremstellen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \ln(x)$$

streng monoton steigend ist.

Übungsaufgabe 3.7.11 (Übungsaufgabe 60). Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^5 + x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ genau eine reelle Lösung hat.

Hinweis: Sie können mit dem Zwischenwertsatz von der entsprechenden Polynomfunktion zeigen, dass sie eine Nullstelle haben muss, und in einem passenden Bereich über die Ableitung das Monotonieverhalten der Funktion studieren.

Übungsaufgabe 3.7.12 (Übungsaufgabe 61). Bestimmen Sie die maximale reelle Definitionsmenge der Funktion f und untersuchen Sie f auf Extrem- und Sattelstellen.

$$f(x) = \ln|x - 3| + \ln|x - 1|.$$

Übungsaufgabe 3.7.13 (Übungsaufgabe 62). Untersuchen Sie f mit $f(x) = x^3(x - 1)^2$ auf Nullstellen, Extrem- und Sattelstellen.

Übungsaufgabe 3.7.14 (Übungsaufgabe 63). Untersuchen Sie f mit $f(x) = (x^2 - 1)^3$ auf Nullstellen, Extrem- und Sattelstellen.

3.8. Regel von de l'Hospital

Satz 3.8.1 (Regel von de l'Hospital - einfache Form). *Es sei I ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $p \in I$ und $g'(p) \neq 0$. Dann folgt aus $f(p) = g(p) = 0$*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

BEWEIS. Wegen $f(p) = 0$ ist

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{x - p} = f'(p),$$

$$\frac{f(x)}{x - p} = f'(p) + r(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to p} r(x) = 0.$$

Analog folgt aus $g(p) = 0$

$$\frac{g(x)}{x - p} = g'(p) + s(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to p} s(x) = 0.$$

$$\text{Aus} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p) + r(x)}{g'(p) + s(x)} \quad \text{folgt} \quad \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

□

BEISPIEL 3.8.2. Für $f, g : (-1; \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1 + x} - 1$ und $g(x) = x$ sind in $p = 0$ die Voraussetzungen von Satz 3.8.1 erfüllt.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = \frac{(1 + x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} \quad \text{und} \quad \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Nahe bei 0 lässt sich durch Umformen die Näherungsfomel

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \text{ableiten.}$$

Für $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ und $g(x) = x^2$ gilt

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2} = \frac{2x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2 \cdot 2x} = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{und} \quad \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Nahe bei 0 lässt sich durch Umformen die Näherungsfomel

$$\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{ableiten.}$$

SATZ 3.8.3 (Regel von de l'Hospital - allgemeine Form). *Es sei $(a; b)$ ein Intervall mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a; b)$ und es existiere*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

als eigentlicher Grenzwert in $\mathbb{R}$ oder als uneigentlicher Grenzwert ∞ oder $-\infty$. Wenn entweder

(1)
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \textit{oder}$$

(2)
$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty \quad \textit{oder} \quad = -\infty,$$

dann folgt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Satz gilt analog für $x \to b$.

Die allgemeine Form der Regel von de l'Hospital kann mithilfe des sogenannten zweiten Mittelwertsatzes bewiesen werden, was wir an dieser Stelle nicht ausführen werden.

Beispiel 3.8.4. Für $a, b \in \mathbb{R}^*$ ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+ae^x)}{bx} = \lim_{x\to\infty} \frac{ae^x}{b(1+ae^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{b(e^{-x}+a)} = \frac{1}{b}.$$

In Übungsaufgabe 2.7.13 wurden die hyperbolischen Winkelfunktionen $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ behandelt. Eine kurze Rechnung zeigt $\cosh' x = \sinh x$ und $\sinh' x = \cosh x$. Außerdem ist $\cosh(0) = 1$ und $\sinh(0) = 0$. Manchmal führt erst ein mehrmaliges Anwenden der Regel von de l'Hospital zum Ziel:

Beispiel 3.8.5.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sinh x}{x\sinh x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x\cosh x + \sinh x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sinh x}{x\sinh x + 2\cosh x} = 0.$$

Die Argumentation zu einer wiederholten Anwendung der Regel von de l'Hospital läuft von hinten nach vorne: Weil der letzte Limes existiert, lässt sich die Regel auf den vorletzten Limes anwenden, welcher folglich existiert. Weil der vorletzte Limes existiert, lässt sich die Regel auf den drittletzten Limes anwenden usw.

Übungsaufgabe 3.8.6 (Übungsaufgabe 64). Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (eigentlich oder uneigentlich), sofern sie existieren:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{2^x - 4}{(x-2)^3}, \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+1}.$$

Übungsaufgabe 3.8.7 (Übungsaufgabe 65). Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0$$

ist für ein beliebiges $a > 0$.

Übungsaufgabe 3.8.8 (Übungsaufgabe 66). Leiten Sie aus $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$ ab, dass $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie $\lim \ldots = \lim e^{\ln \cdots}$ und $\lim e^{\cdots} = e^{\lim \cdots}$, denn die Exponentialfunktion ist stetig.

Übungsaufgabe 3.8.9 (Übungsaufgabe 67). Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^a} - 1}{x^a}$$

für $a > 0$ und leiten Sie daraus eine Näherungsformel für $\sqrt{1+x^a}$ ab. Überprüfen Sie Ihre Näherungsformel, indem Sie diese Formel und $\sqrt{1+x^a}$ mit Geogebra mit einem Schieberegler für $a > 0$ zeichnen.

Übungsaufgabe 3.8.10 (Übungsaufgabe 68). Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim\ldots = e^{\ln\lim\ldots}$ und $\lim\ln\ldots = \ln\lim\ldots$, denn der Logarithmus ist stetig.

3.9. Krümmung

Sekante s im Graphen einer Funktion f durch die Punkte $(x_1 \mid f(x_1))$ und $(x_2 \mid f(x_2))$ ist in Parameterdarstellung

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ f(x_2) - f(x_1) \end{pmatrix},$$

wobei die Punkte der Strecke von $(x_1 \mid f(x_1))$ nach $(x_2 \mid f(x_2))$ mit Parameterwerten $t \in (0;1)$ beschrieben werden.

Definition 3.9.1. Es sei f eine reelle Funktion auf einem Intervall $[a;b]$ und s die Sekante über $[a;b]$. Die Funktion f heißt *streng konvex* (oder *positiv gekrümmt*), wenn der Graph über $(a;b)$ unter der Sekante s liegt bzw. *konvex*, wenn auf oder unter s liegt.

Formal: Die Funktion f ist *konvex*, wenn für alle $t \in (0;1)$ gilt:

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) < f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)).$$

Sie heißt *streng konvex* (oder *positiv gekrümmt* oder *links gekrümmt*), wenn in der Ungleichung ein $\leq$-Zeichen statt dem $<$-Zeichen steht.

Die Funktion heißt *konkav* bzw. *streng konkav* (oder *negativ gekrümmt* oder *rechts gekrümmt*), wenn in der Ungleichung ein $\geq$-Zeichen bzw. ein $>$-Zeichen steht.

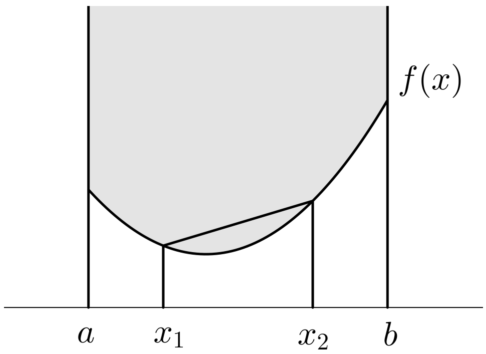

Abbildung 3. konvexe Funktion

Schulmathematik und Anschauung 3.9.2 (Konvexe Mengen). Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle Punkte A und B auch die Strecke $\overline{AB}$ in M enthalten ist. Bildlich gesprochen: wenn M keine Einbuchtungen hat.

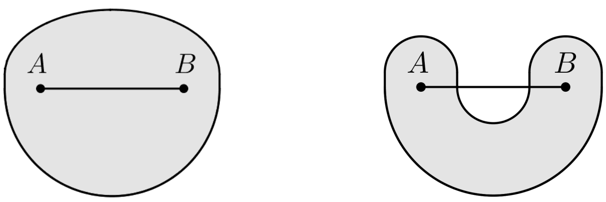

Abbildung 4. konvexe und nicht nicht konvexe Menge

Ein Funktion $f : [a : b] \to \mathbb{R}$ ist also konvex, wenn die (unbeschränkte) Teilmenge der Ebene, die über dem Graphen liegt und von den senkrechten Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, eine in diesem Sinn konvexe Menge ist.

Satz 3.9.3. *Wenn $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine streng steigende Ableitungsfunktion hat, dann ist f positiv gekrümmt.*

Beweis. Es seien $x_1, x_2 \in [a; b]$ und $t \in (0; 1)$. Dann ist

$$\xi = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

eine Stelle zwischen x_1 und x_2. Die Länge von $[x_1; \xi]$ ist $t(x_2 - x_1)$, jene von $[\xi; x_2]$ ist $(1 - t)(x_2 - x_1)$. Der Mittelwertsatz 3.6.6 für die Intervalle $[x_1; \xi]$ und $[\xi; x_2]$ besagt, dass es Stellen $p_1 \in (x_1; \xi)$ und $p_2 \in (\xi; x_2)$ gibt, sodass gilt:

$$\frac{f(\xi) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} = f'(p_1) < f'(p_2) = \frac{f(x_2) - f(\xi)}{(1 - t)(x_2 - x_1)}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x_1) - tf(\xi) + tf(x_1) &< tf(x_2) - tf(\xi), \\ f(\xi) &< f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)), \\ f(x_1 + t(x_2 - x_1)) &< f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)), \end{aligned}$$

was nach Definition 3.9.1 zu zeigen war. □

Korollar 3.9.4. Wenn $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine überall positive zweite Ableitungsfunktion hat, dann ist f positiv gekrümmt.

Beweis. Wenn f'' positiv ist, dann ist nach Satz 3.7.1 die Ableitungsfunktion f' streng steigend, womit die Aussage aus Satz 3.9.3 folgt. □

Definition 3.9.5. Es sei f eine reelle Funktion auf einem Intervall I. Eine *s-förmige* bzw. *Fragezeichen-förmige Wendestelle* ist ein $p \in I$, für das es ein $\delta > 0$ mit $[p - \delta; p + \delta] \subset I$ gibt, sodass f auf $[p - \delta; p]$ positiv und auf $[p - \delta; p + \delta]$ negativ gekrümmt bzw. auf $[p - \delta; p]$ negativ und auf $[p - \delta; p + \delta]$ positiv gekrümmt ist.

Eine Wendestelle ändert sich also das Krümmungsverhalten. Hat f' an einer Stelle p eine lokale Extremstelle, an der sich das Monotonieverhalten ändert, dann ändert f'' in p sein Vorzeichen und f ändert in p das Krümmungsverhalten, dann ist p eine Wendestelle.

Schulmathematik und Anschauung 3.9.6 (NEW-Regel). Durch die SRDP kam das sogenannte graphischen Differenzieren in die Schulmathematik. Dabei werden Zusammenhänge zwischen der Gestalt eines Funktionsgraphen und der Gestalt des Graphens der Ableitungsfunktion hergestellt, ohne etwas zu berechnen. Dabei erfreut sich die sogenannte NEW-Regel großer Beliebtheit, obwohl sie noch nicht Eingang in die Schulbuchlektüre gefunden hat. Sie geht von folgendem Schema aus:

f	N	E	W		
f'		N	E	W	
f''			N	E	W

N steht für Nullstelle, E für Extremstelle und W für Wendestelle. Die Spalten bringen die entsprechenden Stellen in Zusammenhang. Die dritte

Spalte bedeutet: f Extremstelle - f' Nullstelle, die vierte Spalte: f Wendestelle - f' Extremstelle - f'' Nullstelle usw.

Wichtig bei dieser Regel ist allerdings, darauf hinzuweisen, dass zwischen N und E die Implikation nur von oben nach unten und nicht von unten nach oben gilt. Für f mit $f(x) = x^3$ hat f' in $x = 0$ eine Nullstelle, f hat aber in $x = 0$ keine Extremstell. Außerdem gibt es Funktionen mit Ableitungen, die an einer Extremstelle stark oszillieren, die dort aber keine Wendestelle haben. Generell gilt die Regel also nur, wenn die Implikation von oben nach unten läuft. Für die Implikationsrichtung von oben nach unten kann die Regel Hinweise geben, sie gilt da aber nicht allgemein.

Derzeit besteht ein überwiegender Teil der Schulbeispiele zum graphischen Differenzieren aus Graphen von Polynomfunktionen, oft 2. und 3. Grades. Das hat dazu geführt, dass detailliertere Rezepte zum graphischen Differenzieren kursieren, die zwar für solche speziellen Schulbeispiele richtig, jedoch im Allgemeinen falsch sind. Ein dieser Regeln lautet: Wenn f von oben kommt (d.h. von ∞), dann kommt f' von unten (d.h. von $-\infty$), und umgekehrt. Das stimmt für Polynomfunktionen, jedoch nicht für andere Funktionen. Gegenbeispiele sind Funktionen f, die für $x < 0$ negativ gekrümmt sind, für die aber $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ gilt, wie zum Beispiel $f(x) = \ln|x|$. Der Graph dieser Funktion kommt zwar "von oben", jedoch kommt der Graph von f' nicht "von unten", sondern von der negativen x-Achse als Asymptote.

Schulmathematik und Anschauung 3.9.7 (Interpretation der 2. Ableitung). Bei einem lachenden (positiven) Smily ist der Mund positiv gekrümmt, bei einem traurigen (negativen) Smily ist er negativ gekrümmt. Diese nützliche Merkhilfe ist im Schulunterricht sehr beliebt.

Wichtig ist der Zusammenhang zwischen dem Krümmungsverhalten und der Veränderung der Ableitung. Wenn x von links nach rechts wandert und f positiv gekrümmt ist, dreht sich die Tangente bei x gegen den Uhrzeigersinn, das zeigt anschaulich, dass ihre Steigung und somit f' zunimmt. Umgekehrt verhält es sich, wenn f negativ gekrümmt ist. Entsprechende Zusammenhänge werden in der Schule auch im Sachkontext behandelt, zum Beispiel in der Wirtschaftsmathematik oder mit physikalischen Größen.

Wenn f eine Populationsgröße beschreibt, ist $f'(t)$ die momentane Zunahme pro Zeiteinheit (in Individuen, nicht in Prozent) zum Zeitpunkt t. Ein positive zweite Ableitung bedeutet, dass die momentane Zunahme im Lauf der Zeit größer wird.

Die konkreten Werte der zweiten Ableitung als geometrische Krümmung des Graphen zu interpretieren, ist problematisch, wie das folgende Beispiel zeigt: Der Graph von

$$f : [-1; 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ist die obere Hälfte des Einheitskreises und hat somit geometrisch gesehen überall dieselbe Krümmung. Doch die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}^3},$$

die wie f' nur auf $(-1; +1)$ existiert, ist alles andere als konstant. Strebt x mit konstanter Geschwindigkeit von -1 nach 1, dreht sich die Tangente dabei langsam, wenn x in der Mitte des Definitionsintervalls ist, und wenn x nahe bei -1 oder 1 ist, dreht sich die Tangente schnell. Die zweite Ableitung ist also nicht die geometrische Krümmung, sie ist allerdings auch nicht genau die Drehgeschwindigkeit der Tangente. Der Zusammenhang zur Drehgeschwindigkeit ist dadurch gegeben, dass die ersten Ableitung der Funktion der Tangens des Steigungswinkels ist.

Ein Krümmungskreis an einer Stelle eines Graphen einer zweimal differenzierbaren reellen Funktion ist jener Kreis, der an dieser Stelle bestmöglich den Graphen approximiert. Der Kehrwert des Radius des Krümmungskreises ist ein Maß für die geometrische Krümmung. Die geometrische Krümmung der Halbkreisfunktion f ist konstant, denn der Krümmungskreis ist in diesem Fall stets der Kreis selbst.

Übungsaufgabe 3.9.8 (Übungsaufgabe 69). (a) "Wenn $f''(p) = 0$ ist, dann ist p entweder eine Wendestelle oder eine Extremstelle wie $x = 0$ bei $f(x) = x^4$." Ist diese Behauptung richtig?

Hinweise: Studieren Sie f mit $f(x) = x^4 + x$.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 + ax$ und $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Monotoniebereiche, Null-, Extrem- und Wendestellen (sofern vorhanden) sowie die Gleichung der Tangente an der Stelle, an der die Krümmung 0 ist. Verwenden Sie Geogebra mit einem Schieberegler für b, um eine Vermutung zu erhalten und Ihre Lösung zu veranschaulichen.

Übungsaufgabe 3.9.9 (Übungsaufgabe 70). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Wendestellen (sofern vorhanden) und Krümmungsbereiche in Abhängigkeit von a und b und leiten Sie daraus eine Aussage über die Anzahl der Extremstellen ab. Für welche Werte von a und b liegt der Graph der Funktion f für $x \neq 0$ ganz oberhalb der Tangente in $x = 0$. Verwenden Sie Geogebra mit Schiebereglern für a und b, um eine Vermutung zu erhalten und um Ihre Lösung zu veranschaulichen.

KAPITEL 4

Integration

4.1. Zwei Ansätze zur Einführung des Integrals

Das Integral einer Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ kann auf zwei Arten eingeführt werden. Erstens als *Stammfunktion* von f. Das ist eine Funktion F mit $F' = f$. Dieses sogenannte *unbestimmte Integral* wird mit $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F + c$ bezeichnet und meint die Menge aller Funktionen, deren Ableitung f ist, dabei ist F eine der Stammfunktionen und c eine beliebige Zahl, die sogenannt *Integrationskonstante*.

Die zweite Art, das Integral zu definieren, ist als Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse, wobei Flächenteile unterhalb der x-Achse als negative Größe gemessen werden. Für dieses sogenannte *bestimmte Integral* wird

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

geschrieben. Die zu integrierende Funktion wird *Integrand* genannt.

Egal welcher Zugang gewählt wird, der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung führt diese beiden Ansätze zusammen. Er besagt, dass die Fläche mit einer Stammfunktion berechnet werden kann:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Wenn die Flächenfunktion gleich der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse zwischen a und x ist, lautet der Hauptsatz: Die Steigung einer Tangente an die Flächenfunktion ist gleich dem ursprünglichen Funktionswert.

Es kann ein anschaulich-geometrisches Verständnis für diesen Zusammenhang entwickelt werden, das ihn verständlich und offensichtlich macht.

Schulmathematik und Anschauung 4.1.1 (Definition des Integrals). Vor der Einführung der Zentralmatura war die Schulmathematik eher ergebnisorientiert. Das Lösen schwieriger Aufgaben stand im Vordergrund. Teilweise wurde das Integral auch über die Stammfunktion eingeführt, weil das einfach ist und schnell zu einem Ergebnis führt. Die Gefahr bei diesem Zugang ist, dass das Verständnis für die Bedeutung des Integrals als Fläche auf der Strecke bleibt. Auch aus anderen Gründen und in anderen Teilbereichen gab es vor der Einführung der Zentralmatura oft das Problem, dass Rezeptlösungen zu bestimmten Aufgabentypen gelernt und durchgeführt wurden, ohne ein tieferes Verständnis zu entwickeln. Ein derartig angeeignetes Wissen ist nicht nur nutzlos, sondern wird auch rasch vergessen.

Heute wird in der Schulmathematik Wert auf die Bedeutung des Integrals als Flächeninhalt gelegt, aber auch auf ein Verständnis für Integration (nach der Zeit $\mathrm{d}t$) im physikalischen Kontext: Das Integral der Geschwindigkeit ist der Weg, das Integral der Leistung ist ist Arbeit. Auch variierende Flussgeschwindigkeiten werden integriert um Füllmengen zu bestimmen usw. Um rasch ein geometrisches Verständnis zu entwickeln, wird heute in der Schulmathematik zuerst das bestimmte Integral eingeführt.

4.2. Ober- und Untersummen

Definition 4.2.1. Eine *Zerlegung (Partition)* eines Intervalls $[a;b]$ ist eine endliche streng steigende Folge Z, die in a beginnt und in b endet, also eine Folge $Z = (x_i)_{0\leq i\leq k}$ mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b.$$

Ober- bzw. *Untersumme* einer beschränkten Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ zu dieser Zerlegung sind

$$O(Z,f) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \sup f([x_{i-1};x_i]) \quad \text{bzw.}$$

$$U(Z,f) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1};x_i]).$$

Ein *Verfeinerung* einer Zerlegung Z ist eine Zerlegung, deren Folgenelemente jene von Z enthalten.

Aus der Definition folgen $U(Z,f) \leq O(Z,f)$.

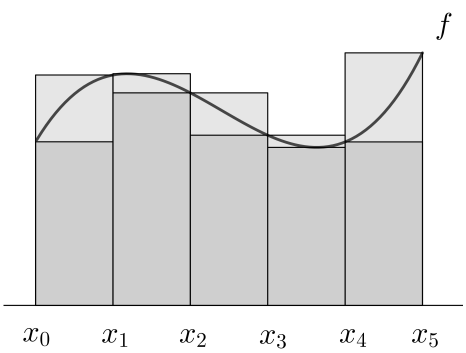

Abbildung 1. Ober- und Untersumme

Satz 4.2.2. *Ein Verfeinern der Zerlegung bewirkt, dass die Differenz von Ober- und Untersumme sich verringert (oder gleich bleibt).*

Formal: Es sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Z eine Zerlegung von $[a;b]$. Ist Z' eine Verfeinerung von Z, gilt

$$U(Z,f) \leq U(Z',f) \leq O(Z',f) \leq O(Z,f).$$

Beweis. Aus der Anschauung kann man erkennen, das eine Verfeinerung der Zerlegung die Obersumme kleiner (oder gleich) wird, die Untersumme hingegen größer (oder gleich). Formal ausgeschrieben lautet die Begründung:

Wird eines der Intervalle $[x_{i-1}; x_i]$ in zwei Teilintervalle $[x_{i-1}; y]$ und $[y; x_i]$ zerlegt, entsteht aus Z eine Verfeinerung Z'. In der Differenz

$$O(Z, f) - U(Z, f) - (O(Z', f) - U(Z', f))$$

fallen alle Summanden der Ober- und Untersummen weg. Es bleibt

$$\begin{gathered}(x_i - x_{i-1})(\sup f[x_{i-1}; x_i] - \inf f[x_{i-1}; x_i]) - \\ (y - x_{i-1})(\sup f[x_{i-1}; y] - \inf f[x_{i-1}; y]) - \\ (x_i - y)(\sup f[y; x_i] - \inf f[y; x_i]) = \\ (y - x_{i-1})(\sup f[x_{i-1}; x_i] - \sup f[x_{i-1}; y] + \inf f[x_{i-1}; y] - \inf f[x_{i-1}; x_i]) + \\ (x_i - y)(\sup f[x_{i-1}; x_i]) - \sup f[x_{i-1}; y] + \inf f[x_{i-1}; y] - \inf f[x_{i-1}; x_i]).\end{gathered}$$

Dieser Term ist größer oder gleich 0, weil

$$\begin{aligned}\sup f[x_{i-1}; x_i] &\geq \sup f[x_{i-1}; y] \quad \text{und} \\ \inf f[x_{i-1}; x_i] &\leq \inf f[x_{i-1}; y] \quad \text{ist.}\end{aligned}$$

Was für das Hinzufügen eines einzelnen Zerlegungspunktes y gilt, ist auch für das Hinzufügen endlich vieler Zerlegungspunkte richtig. □

Satz 4.2.3. *Jede Obersumme ist größer oder gleich jeder Untersumme, egal welche Zerlegungen gewählt werden.*

Formal: Es sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, Z_1 und Z_2 seien Zerlegungen von $[a; b]$. Dann gilt

$$U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f).$$

Beweis. Die Vereinigung der Zerlegungspunkte von Z_1 und Z_2 ergibt eine Zerlegung Z_3. Diese sowohl eine Verfeinerung von Z_1 als auch eine Verfeinerung von Z_2. Aus Satz 4.2.2 folgt

$$U(Z_1, f) \leq U(Z_3, f) \leq O(Z_3, f) \leq O(Z_2, f).$$

□

Aus Satz 4.2.3 folgt, dass zu jeder beschränkten Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall die Menge alle möglichen Untersummen nach oben und die Menge aller Obersummen nach unten beschränkt ist.

Definition 4.2.4. Es sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{U(Z, f) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a; b]\} \text{ bzw.}$$

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a; b]\}$$

oberes bzw. *unteres Integral* von f. Die Funktion f heißt *Riemann-Darboux-integrierbar* bzw. *RD-integrierbar*, wenn

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist. In diesem Fall heißt diese Zahl *RD-Integral* und wird mit

$$\int_a^b f(x)$$

bezeichnet.

Übungsaufgabe 4.2.5 (Übungsaufgabe 71). Es sei $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ die Indikatorfunktion von

$$M = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Existiert $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$? Wenn ja, welchen Wert hat das Integral?

4.3. Integral stetiger und monotoner Funktionen

Definition 4.3.1. Die *Feinheit* der Zerlegung ist die Länge des längsten Intervalls $[x_{i-1}; x_i]$, also

$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \le i \le k\}.$$

Ein Folge von Zerlegungen$(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eines Intervalls heißt *Zerlegungsnullfolge*, wenn die Feinheiten der Zerlegungen gegen Null streben und jede Zerlegung eine Verfeinerung der vorangegangenen Zerlegungen ist.

Satz 4.3.2. *Jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist RD-integrierbar.*

Für jede Zerlegungsnullfolge konvergieren die Folgen der Ober- und der Untersummen gegen das Integral.

Beweis. Es sei f auf $[a;b]$ stetig, $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Zerlegungsnullfolge von $[a;b]$. Die Zerlegung Z_k sei

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

und M_i das Maximum und m_i das Minimum von f auf $[x_{i-1}; x_i]$. Dass f auf diesem Intervall Maximum und Minimum annimmt, besagt Satz 2.5.4. Für Z_n sei

$$d_n := \max\{M_i - m_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Die Folge (d_n) ist fallend, da jede der Zerlegungen Z_n eine Verfeinerung der vorangegangenen Zerlegungen ist, und sie ist durch Null nach unten beschränkt. Folglich ist sie konvergent. Wir wollen zeigen, dass aus der Stetigkeit von f folgt, dass (d_n) eine Nullfolge und f RD-integrierbar ist.

Ein Intervall der Zerlegung Z_n, auf dem $M_n - m_n = d_n$ gilt, wird nun d-Intervall (von Z_n) genannt. Das sind also jene Intervalle von Z_n, auf denen obere und untere Treppenlinien am weitesten auseinander liegen.

Für alle n zusammen gibt es unendlich viele d-Intervalle. Es sei J_0 ein Intervall von Z_0, das unendlich viele d-Intervalle enthält. In Z_1 zerfällt J_0 in endlich viele Teilintervalle. Zumindest eines davon muss unendlich viele d-Intervalle enthalten. Es sei J_1 eines dieser Teilintervalle, wobei J_1 selbst kein d-Intervall sein muss. In J_1 liegt ein Intervall J_2 von Z_2, das wieder unendlich viele d-Intervalle enthält, wobei wieder j_2 selbst kein d-Intervall sein muss. So ist eine Folge (J_n) von Intervallen J_n aus Z_n rekursiv definiert, die alle unendlich viele d-Intervalle enthalten. Die Folge (J_n) bildet eine Intervallschachtelung. Es sei p der eindeutig bestimmte Punkt, der in allen J_n liegt.

Alle bis auf endlich viele Werte d_n sind kleiner oder gleich $\sup f(J_n) - \inf f(J_n)$ Es seien r_n und s_n in J_n mit $f(s_n) - f(r_n) = \sup f(J_n) - \inf f(J_n)$. Weil f stetig ist, folgt aus

$$\lim r_n = \lim s_n = p, \quad \text{dass} \quad \lim f(r_n) = \lim f(s_n) = f(p)$$

ist. Aus $\lim(f(s_n) - f(r_n)) = 0$ folgt $\lim d_n = 0$ und f ist RD-integrierbar. □

SATZ 4.3.3. *Jede monotone Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist RD-integrierbar.*

BEWEIS. Es sei f auf $[a;b]$ monoton und (Z_n) eine Zerlegungsnullfolge mit

$$Z_n = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b).$$

Da f monoton ist, liegen die Extremstellen der Teilintervalle immer an ihren Rändern. Ist f steigend und c_n die Feinheit der Zerlegung Z_n gilt

$$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})f(x_i) - \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})c_n = (b-a)c_n.$$

Das heißt, $(O(Z_n, f) - U(Z_n, f))$ ist eine Nullfolge und f ist RD-integrierbar. □

ÜBUNGSAUFGABE 4.3.4 (Übungsaufgabe 72). Bestimmen Sie

$$\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$$

mithilfe von Ober- oder Untersummen ohne Stammfunktion. Aus welchen Sätzen folgt, dass dieses Integral existiert?

4.4. Eigenschaften des Integrals

SATZ 4.4.1. *Wenn $f, g[a;b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$ dann sind $f+g$ und λf integrierbar und es gilt:*

(1) $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(Monotonie),*
(2) $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Homogenität),*
(3) $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(Additivität).*

SCHULMATHEMATIK UND ANSCHAUUNG 4.4.2 (Linearität). Homogene und additive Funktionen werden in der höheren Mathematik *linear* genannt. Oft werden Vektorräume V über einem Körper K betrachtet und Funktionen f mit $f(x+y) = f(x)+f(y)$ für $x, y \in V$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ mit $\lambda \in K$. Die Menge der auf einem Intervall integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum über dem Körper $K = \mathbb{R}$. Lineare Abbildungen, die jeden Vektor auf ein Skalar (also auf ein Element von K) abbilden, werden *Funktionale* genannt. Satz 4.4.1 besagt also: Das Integral ist ein Funktional (auf dem Vektorraum der integrierbaren Funktionen).

In der Schulmathematik werden Funktionen, deren Graph eine Gerade ist, *linear* genannt. Wenn der Graph durch den Koordinatenursprung geht, werden sie *homogen linear* (siehe Homogenität) genannt. In der höheren Mathematik ist das anders. Der Begriff "linear" wird hier nur für homogene und additive Funktionen verwendet. Eine Funktion f mit $f(x) = kx+d$ und $d \neq 0$ ist in der höheren Mathematik also nicht linear.

Beweis von Satz 4.4.1. Ein konstanter Faktor lässt sich aus einer Summe herausheben. Daher gilt für alle Zerlegungen Z

$$O(Z, \lambda f) = \lambda O(Z, f) \quad \text{und} \quad U(Z, \lambda f) = \lambda U(Z, f),$$

woraus die erste Aussage folgt. Für ein Intervall $[x_{i-1}, x_1]$ einer Zerlegung gilt

$$\sup(f+g)[x_{i-1}; x_i] \leq \sup f[x_{i-1}; x_i] + \sup g[x_{i-1}; x_i] \quad \text{und}$$
$$\inf(f+g)[x_{i-1}; x_i] \geq \inf f[x_{i-1}; x_i] + \inf g[x_{i-1}; x_i].$$

Daraus folgt

$$U(Z, f) + U(Z, g) \leq U(Z, f+g) \leq O(Z, f+g) \leq O(Z, f) + O(Z, g),$$

daher folgt aus der Integrierbarkeit von f und g die Integrierbarkeit der Summe $f + g$. □

4.5. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 4.5.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Wenn $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, gibt es ein $p \in (a; b)$ mit*

$$f(p)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Es sei $m = \min f[a; b]$ und $M = \max f[a; b]$, diese existieren nach Satz 2.5.4. Aus $m \leq f(x) \leq M$ folgt nach Satz 4.4.1.1

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Die Funktion $x \mapsto f(x)(b-a)$ ist auf $[a; b]$ stetig und nimmt nach dem Zwischenwertsatz 2.5.1 alle Werte zwischen ihrem Minimum $m(b-a)$ und ihrem Maximum $M(b-a)$ an. Also existiert ein $p \in (a; b)$ mit

$$f(p)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Schulmathematik und Anschauung 4.5.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt, dass das Rechteck mit Breite $b-a$ und Höhe $f(p)$ denselben Flächeninhalt wie die Fläche unter dem Graphen hat.

Der Funktionswert $f(p)$ kann als Durchschnittswert der Funktion interpretiert werden. Wenn in kontextbezogenen Aufgabenstellungen bei gegebenem f der Durchschnittswert gefragt ist, wird das Integral durch $b-a$ dividiert. Sind Zeitpunkte gefragt, an denen der Durchschnittswert angenommen wird, muss $f(p)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nach p gelöst werden. Anders als in Abbildung 2 kann es auch mehrere Stellen (bzw. Zeitpunkte) geben, an denen der Druchschnittswert $f(p)$ angenommen wird.

Übungsaufgabe 4.5.3 (Übungsaufgabe 73). Es sei $f : [2; 5] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -(x-2)(x-5)$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $p \in [2; 5]$ mit

$$\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = f(p)(5-2).$$

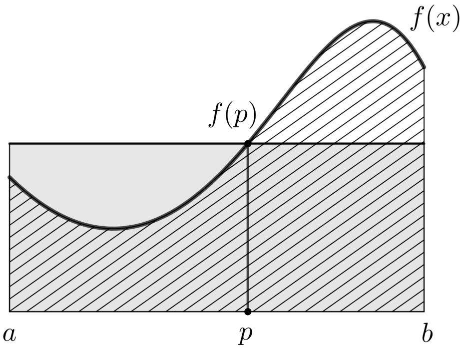

Abbildung 2. $f(p)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Welches p ist das? Gibt es mehrere solche Stellen p? Illustrieren Sie den Sachverhalt durch eine Skizze mit dem Graphen und einer entsprechenden Rechtecksfläche.

4.6. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 4.6.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

(1) *Wenn $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, gilt für alle $x \in [a;b]$*

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

Die Ableitung des (bestimmten) Integrals (mit der oberen Integrationsgrenze als Variable) ist die ursprüngliche Funktion.

(2) *Wenn $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, gilt für alle $x \in [a;b]$*

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$

Das (bestimmte) Integral der Ableitung ist die ursprüngliche Funktion (minus $f(a)$).

Schulmathematik und Anschauung 4.6.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Wie in Kapitel 4.1 erwähnt, stellt der Hauptsatz den Zusammenhang her zwischen dem Berechnen der Tangentensteigungen (Differenzieren) und dem Bestimmen der Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse (bestimmtes Integral).

Von der Definition des Integrals als (unbestimmtes Integral) ausgehend, macht der Hauptsatz keine Aussage. Seine Aussage ist eine geometrische, sie bezieht sich nur auf das bestimmte Integral

Beweis von Satz 4.6.1.

(1) $$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h f(p_h) = \lim_{h\to 0} f(p_h).$$

Die vorletzte Gleichheit ist eine Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung 4.5.1. Weil f stetig ist, folgt

$$\lim_{h\to 0} f(p_h) = f(\lim_{h\to 0} p_h) = f(x).$$

(2) Aus (1) folgt $$\left(f(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x) - f(x) = 0.$$

Satz 3.6.8 besagt, dass eine Funktion auf einem Intervall, deren Ableitung 0 ist, konstant ist. Also ist

$$f(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = c$$

für eine Konstante c. Für $x = a$ ist $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, also ist $c = f(x)$. □

Schulmathematik und Anschauung 4.6.3 (Anschauung zum Beweis des Hauptsatzes).

(1) Die absolute Änderung der Flächenfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[x; x+h]$ ist

$$\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

und entspricht nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 4.5.1 der Rechtecksfläche

$$hf(p_h),$$

wobei $f(p_h)$ der Durchschnittswert von f auf $[x; x+h]$ ist. Der Differenzenquotient (Sekantensteigung bzw. mittlere Änderungsrate) der Flächenfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[x; x+h]$ ist

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{hf(p_h)}{h} = f(p_h).$$

Was also beim Integrieren über $[x; x+h]$ durchschnittlich zur Fläche hinzukommt, ist die Höhe $f(p_h)$ des entsprechenden Rechtecks. Für $h \to 0$ wird aus der Sekante eine Tangente und die Höhe strebt gegen $f(x)$.

Was beim Integrieren als momentane Änderungsrate an der Stelle x zur Fläche hinzukommt, ist eine senkrechte Linie (als degeneriertes Rechteck) der Höhe $f(x)$. Also ist die Ableitung der Flächenfunktion gleich $f(x)$.

(2) Für eine Zerlegung mit $x_i = a + 1$ besteht die Differenz von Ober- und Untersumme aus Rechtecken mit Breite 1 und Höhe $f(x_{i+1}) - f(x_i)$, siehe Abbildung 3. Die Flächeninhalte der Rechtecke sind ebenfalls $f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Werden diese Rechtecke waagrecht zur y-Achse geschoben, ergeben sie zusammen ein Rechteck mit Breite 1 und Höhe $f(b) - f(a)$, was der Gleichung

$$f(b) - f(a) = \sum_i (f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

entspricht. Die Diagonalen der Rechtecke (von links unten nach rechts oben) erzeugen Steigungsdreiecke der entsprechenden Sekanten. Das Aufsummieren der Steigungen ergibt also $f(b) - f(a)$. Dies ist näherungsweise bereits die zweite Aussage des Hauptsatzes.

Für eine äquidistante Zerlegung mit Inkrement $\Delta x < 1$ werden die Rechtecke zwischen Ober- und Untersumme zu Rechtecken mit Breite 1 nach rechts vergrößert, siehe Abbildung 4. Die Rechtecke zwischen Ober- und Untersumme sind jener linke Teil des breiteren Rechtecks, dessen Diagonale die Sekante des Graphen ist.

Für $\Delta x \to 0$ nähern sich die Sekantensteigungen der Tagentensteigung $f'(x)$. Nach dem Strahlensatz (ähnliche Dreiecke) ist die Höhe des Rechtecks in Abbildung 5 näherungsweise gleich $\Delta x f'(x)$. Die Summe der Flächeninhalte strebt für $\Delta x \to 0$ gegen das Integral der Ableitung:

$$\sum_i f'(x_i)\Delta x \underset{\Delta x \to 0}{=} \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

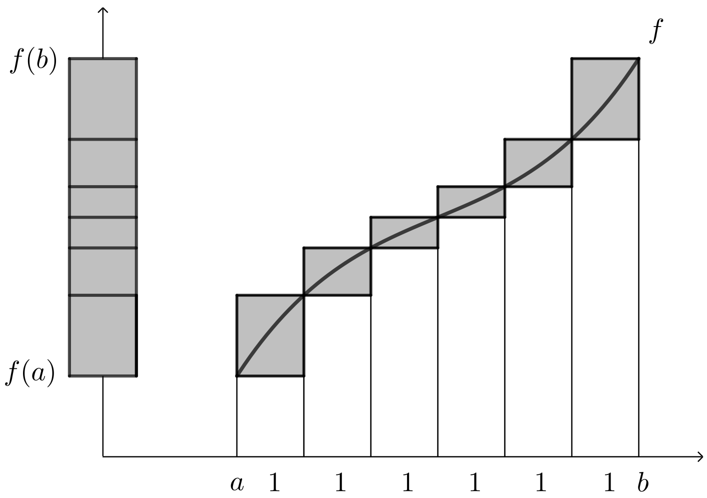

ABBILDUNG 3. $f(b) - f(a) = \sum_i (f(x_{i+1}) - f(x_i))$

4.7. Integrationsregeln

DEFINITION 4.7.1. Wenn $F, f : [a;b] \to \mathbb{R}$ und $F' = f$, dann heißt F *Stammfunktion* von f.

Nach dem Hauptsatz 4.6.1.1 hat jede stetige auf $[a;b]$ integrierbare Funktion f eine Stammmfunktion, nämlich F mit

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist auch $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Hauptsatz 4.6.1.2 besagt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b).$$

Die Stammfunktion wird auch *unbestimmtes Integral* genannt. Notation:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

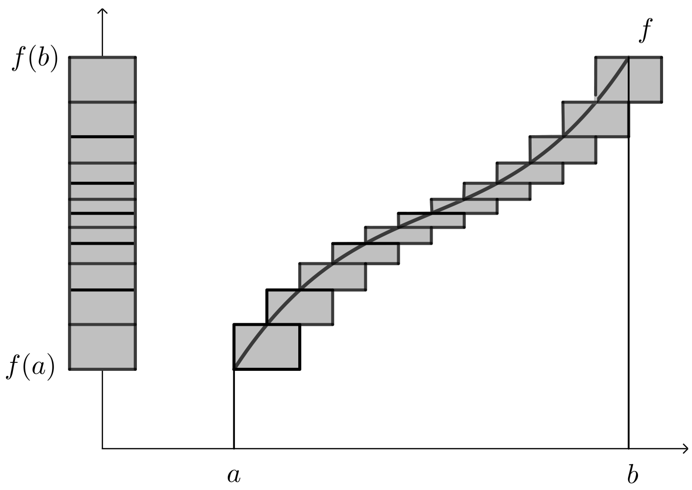

Abbildung 4. $f(b) - f(a) \approx \sum_i f'(x_i)\Delta x$ bzw. $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$

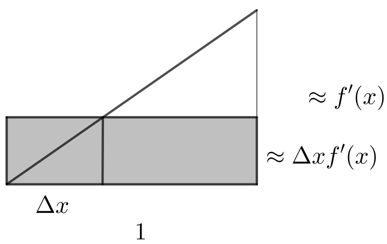

Abbildung 5. Detail zu Abbildung 4

Rechnerisch zu integrieren bedeutet Stammfunktionen zu finden.

Beispiel 4.7.2. Nicht jede auf einem Intervall RD-integrierbare Funktion hat eine Stammfunktion. Die Funktion $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \text{ und} \\ 0, & \text{wenn } x > 0, \end{cases}$$

ist integrierbar und

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Es gibt aber keine Funktion F mit $F' = f$. Eine solche Funktion F wäre nach Satz 3.6.8 auf $(0;1]$ konstant, also $F(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in (0;1]$. Es müsste dann

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{c - F(0)}{x} = 1$$

sein, was unmöglich ist. Denn entweder ist $c = F(0)$, dann ist dieser Grenzwert 0, oder es ist $c \neq F(0)$, dann ist er entweder ∞ oder $-\infty$.

SATZ 4.7.3. *Das unbestimmte Integral ist linear. Das heißt, wenn f und g die Stammfunktionen F und G haben, dann ist $F+G$ die Stammfunktion von $f+g$ und für alle $a \in \mathbb{R}$ ist aF die Stammfunktion von af.*

BEWEIS. Die Aussage folgt aus der Summenregel und Regel vom konstanten Faktor in Kapitel 3.2 (Linearität der Ableitung). □

SATZ 4.7.4. *Für $r \neq -1$ und $a > 0$ gilt:*

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \tag{4.7.4.1}$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, \tag{4.7.4.2}$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \textit{und insbesondere} \quad \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c. \tag{4.7.4.3}$$

BEWEIS. Die Aussagen folgen aus den entsprechenden Ableitungsregeln: Nach Satz 3.5.5 ist

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + c\right)' = x^a.$$

Für $x > 0$ ist nach Satz 3.5.2

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Für $x < 0$ folgt mit der Kettenregel 3.4.1

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Nach Satz 3.5.4 ist

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + c\right)' = a^x.$$

□

SATZ 4.7.5 (Partielle Integration). *Wenn $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f \cdot g'$ und $f' \cdot g'$ integrierbar sind, ist*

$$\int f'(x)g(x) \,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn f und g stetig differenzierbar sind.

BEWEIS. Die zur Aussage äquivalente Gleichung

$$\int f'(x)g(x) \,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x) \,\mathrm{d}x = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) \,\mathrm{d}x = fg$$

folgt aus der Kettenregel $(fg)' = f'g + fg'$. Wenn f und g stetig differenzierbar sind, dann sind $f \cdot g'$ und $f' \cdot g'$ stetig auf $[a;b]$ und somit nach Satz 4.3.2 integrierbar. □

SATZ 4.7.6 (Integration mit Substitution). *Wenn $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $g : f([a;b]) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion G hat, gilt für $u = f(x)$*

$$\int g(f(x))f'(x) \,\mathrm{d}x = \int g(u) \,\mathrm{d}u \quad \textit{und}$$

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,\mathrm{d}u = G(f(b)) - G(f(a)).$$

Beweis. Nach der Kettenregel 3.4.1 ist

$$(G \circ f)'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{und somit}$$

$$(G \circ f)(x) = \int g(f(x)) \cdot f'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Aus dem Hauptsatz 4.6.1.2 folgt

$$G(f(b)) - G(f(a)) = \int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\ \mathrm{d}x.$$

□

Schulmathematik und Anschauung 4.7.7 (Händisches Integrieren). Umgangssprachlich versteht man unter händischem Integrieren das Auffinden von Stammfunktionen unter Zuhilfenahme der Integrationsregeln jedoch ohne Computereinsatz. Diese Techniken wurden in den Schulen lange Zeit unterrichtet. Im Rahmen standardisierten Reife- und Diplomprüfung werden sie nur noch in minimalem Umfang abverlangt, auch wenn die Integrationsregeln in den Mathematik Schulbüchern noch behandelt werden. Gelegentlich werden partielle Integration und die Substitutionsmethode noch unterrichtet, insondere in den HTL. In wie weit das sinnvoll ist, ist wohl Gegenstand aktueller Diskussionen, denn vermutlich werden diese Fähigkeiten nicht einmal in den Ingenieursdisziplinen praktisch verwendet. Studierende des Unterrichtsfachs müssen das händische Integrieren aber in jedem Fall beherrschen, denn ersten ist es noch nicht ganz aus der Schulpraxis verschwenden und zweitens kann die zukünftige Generation der Schulmathematiker/innen das Unterrichtsfach Mathematik und seine Inhalte nur dann weiterentwickeln, wenn sie zumindest den Schulstoff der vergangenen Jahrzehnte beherrscht.

Schulmathematik und Anschauung 4.7.8 (Strategien zur partiellen Integration). Beim Differenzieren führen meistens die Ableitungsregeln direkt ans Ziel. Das Integrieren ist grundsätzlich schwieriger ist, da es manchmal Erfahrung braucht, um zu Erkennen, welche Technik ans Ziel führt. Oft sind Funktionen mit einer relativ einfachen Termstruktur zwar RD-integrierbar, doch ihre Stammfunktion lässt sich nicht durch einen endlichen Term darstellen. Solche Funktionen werden nicht nicht elementar integrierbar genannt. Beispiele nicht elementar integrierbarer Funktionen sind $f(x) = e^{x^2}$ oder $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$.

Beim partiellen Integrieren eines Produktes muss zuerst festgelt werden, welcher Faktor f' und welcher Faktor g sein soll. Oft werden dafür die Buchstaben u und v verwendet und als Merkhilfe unter das Integral geschrieben.

Strategie A: Ein Faktor hat die Form $u = x^n$ mit $n \geq 1$. Durch das n-fache Differenzieren von x^n wird aus diesem Faktor eine Konstante. Der zweite Faktor v' führt beim n-fachen Integrieren auf einen Term, dessen Stammfunktion bekannt ist. Typischerweise kommen im zweiten Faktor die

Exponentialfunktion oder trigonometrische Funktionen vor. Als Beispiel:

$$\int x^2 e^x \; \mathrm{d}x = x^2 e^x - \int 2x e^x \; \mathrm{d}x + c =$$

$$\textstyle\int u \cdot v' \quad = u \cdot v \; - \; \int u' \cdot v$$

$$x^2 e^x - \int 2x e^x \; \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x \; \mathrm{d}x =$$

$$\textstyle\int u \cdot v' \quad = \quad u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c.$$

Strategie B: Im Produkt $u \cdot v'$ ist u ein Logarithmus, dessen Ableitung mit v multipliziert einen leicht integrierbaren Term ergibt. Zum Beispiel

$$\int x \ln x \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x + c = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \; \mathrm{d}x + c =$$

$$\textstyle\int u' \cdot v \quad = \quad u \cdot v \quad - \quad \int u' \cdot v$$

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + c.$$

Strategie C: Partielles Integrieren führt auf eine Gleichung die nach dem ursprünglichen Integral aufgelöst werden kann. Es wird also nicht explizit integriert, sondern das Integral implizit aus einer Gleichung heraus berechnet. Beispiele hierfür sind $\int \sin^2 x \; \mathrm{d}x$ und $\int \cos^2 x \; \mathrm{d}x$, siehe Beipiel 4.10.14.

Schulmathematik und Anschauung 4.7.9 (Strategien zur Substitutionsmethode). Es gibt viele teils trickreiche Ansätze zur Substitution, mit denen Integrale berechnet werden können. Der einfachste Ansatz ist, dass versucht wird, den Integranden als Produkt $ag(f(x)) \cdot f'(x)$ zu erkennen, wobei ein weiterer konstanter Faktor a keine Rolle spielt bzw. geeignet gewählt werden muss. Ein Beispiel ist

$$\int_0^2 x e^{x^2} \; \mathrm{d}x.$$

Allgemein empfiehlt sich als Rechenhilfe folgendes Schema:

$$\begin{aligned} u &= x^2 & \qquad\qquad x &: 0 \to 2 \\ 1 \; \mathrm{d}u &= 2x \; \mathrm{d}x & u &: 0 \to 4 \end{aligned}$$

Nach dem Anschreiben der Substitution als Gleichung, wird eine Seite nach u abgeleitet und mit $\mathrm{d}u$ ergänzt, die andere Seite wird nach x abgeleitet und mit $\mathrm{d}x$ ergänzt. Bei bestimmten Integralen wird vermerkt, zwischen welchen Grenzen sich die Variable u in Abhängigkeit von x bewegt. Im obigen Beispiel wird $\mathrm{d}x$ durch $\frac{1}{2}$ $\mathrm{d}u$ ersetzt und die Grenzen entsprechend auf jene von u geändert. Das ergibt

$$\int_0^2 x e^{x^2} \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^4 e^u \; \mathrm{d}u = \frac{1}{2} e^u \Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

Ein wichtiger Spezialfall ist die lineare Substitution $u = rx + s$, zum Beispiel $u = 2x - 1$ in $\int \frac{1}{2x-1} \; \mathrm{d}x$.

Übungsaufgabe 4.7.10 (Übungsaufgabe 74). Berechnen Sie das unbestimmte Integral mit partieller Integration

$$\text{(a)} \quad \int x\sqrt{e^x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \quad \int \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Übungsaufgabe 4.7.11 (Übungsaufgabe 75). Berechnen Sie das Integral mit wiederholter partieller Integration

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Übungsaufgabe 4.7.12 (Übungsaufgabe 76). Berechnen Sie mit einer geeigneten Substitution:

$$\text{(a)} \int_2^6 \frac{x}{45+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_a^b \sqrt{cx+d}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } c,d \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

Übungsaufgabe 4.7.13 (Übungsaufgabe 77). Berechnen Sie

$$\text{(a)} \int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_3^4 2^x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int x^3 \ln x.$$

4.8. Uneigentliche Integrale

Bis jetzt sind Integrale nur für beschränkte Funktionen auf einem Intervall $[a;b]$ definiert worden. Integrale können auch sinnvoll für offene $(a;b)$ oder halboffene Intervalle $[a;b)$ bzw. $(a;b]$ definiert werden, wenn das Intervall unendlich groß ist, oder die Funktion am offenen Rand des Intervalls gegen $\pm\infty$ strebt.

Definition 4.8.1. Eine Funktion ist *uneigentlich auf* $[a;b)$ *integrierbar* für $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wenn f auf jedem abgeschlossenem Teilintervall von $[a;b)$ integrierbar ist und

$$\lim_{p \to\ b-} \int_a^p f(x)\ \mathrm{d}x$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit

$$\int_a^{b-} f(x)\ \mathrm{d}x$$

bezeichnet. Analog ist

$$\int_{a+}^b f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{p \to\ a+} \int_p^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

definiert, sofern der Limes existiert. Die Funktion heißt uneigentlich integrierbar auf $(a;b)$, wenn für ein $c \in (a;b)$ die uneigentlichen Integrale auf $(a;c]$ und $[c;b)$ existieren. Notation:

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{a+}^{c} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^{b-} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Der Wert von $\int_{a+}^{b-} f(x)$ hängt nicht von der Zwischenstelle c ab.

Beispiel 4.8.2. Für welche α existiert $\int_{0+}^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$? Es gilt für $0 < p < 1$

$$\int_p^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\ln p & \text{für } p = -1, \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_p^1 = \frac{1-p^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \end{cases}$$

Also existiert das uneigentliche Integral genau dann, wenn $\alpha > -1$ ist. Der Grenzübergang liefert

$$\int_{0+}^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Beispiel 4.8.3. Um $\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \,\mathrm{d}x$ zu bestimmen, sei $p \in (0;1)$:

$$\lim_{p\to 1-} \int_0^p (\sqrt{1-x})^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \lim_{p\to 1-} -2\cdot(\sqrt{1-x})^{\frac{1}{2}}\Big|_0^p =$$

$$\lim_{p\to 1-} \left(-2\cdot(\sqrt{1-x})^{\frac{1}{2}} + 2\right) = 2.$$

Übungsaufgabe 4.8.4 (Übungsaufgabe 78). Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_1^{\infty+} x^\alpha \mathrm{d}x?$$

Bestimmen Sie den Wert des Integrals.

Übungsaufgabe 4.8.5 (Übungsaufgabe 79). Für die Gravitationskraft F zweier Massepunkte m_1 und m_2 die r Meter voneinander entfernt sind, gilt

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wobei die Gravitationskonstante G circa $6,67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}$ ist. Die Masse der Erde sei M, ihr Radius R und eine Rakete habe die Masse m.

Welche Arbeit muss vom Triebwerk verrichtet werden, bis die Rakete (a) die Höhe h (b) das Weltall erreicht hat?

4.9. Bogenlänge von Funktionsgraphen

Ein Kurve ist eine stetige Abbildung von einem Intervall $[a;b]$ in einen n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$. Ihr Graph ist eine zusammenhängende (beliebig gekrümmte) Linie. Wenn dem Graphen ein Länge zugeordnet werden kann, heißt die Kurve rektifizierbar. Im Folgenden wird der Spezialfall von Graphen reeller Funktionen behandelt.

Der Polygonzug einer Zerlegung $Z : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ von $[a;b]$ ist die Vereinigung der Strecken zwischen den Punkten $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ und $(x_i, f(x_i))$ für $i = 1,\ldots,k$. Die Längen dieser Strecken sind nach dem Satz von Pythagoras (bzw. entsprechend der Formel für den Abstand zweier Punkte)

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Die *Länge des Polygonzugs zur Zerlegung Z* ist

$$L(Z) = \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{4.9.0.1}$$

Ist Z' eine Verfeinerung von Z folgt wegen der Dreiecksungleichung für Punkte im $\mathbb{R}^2$, dass $L(Z') \geq L(Z)$ ist, siehe Abbildung 8.

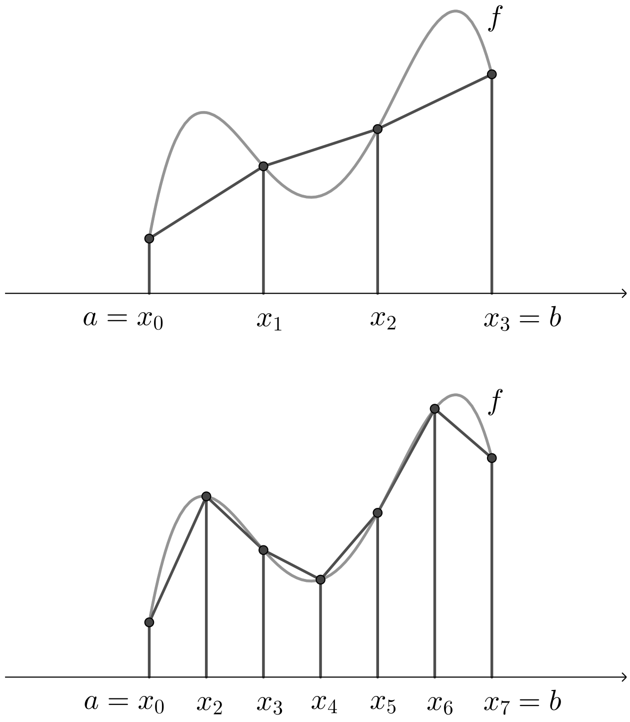

Abbildung 6. Verfeinerung einer Zerlegung mit Polygonzügen

Definition 4.9.1. Die *Bogenlänge* des Graphen einer Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ist das Supremum der Längen aller Polygonzüge zu Zerlegungen von $[a;b]$.

Satz 4.9.2. *Eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ hat die endliche Bogenlänge*

$$B(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Die Länge des Polygonzugs zu einer Zerlegung Z von $[a;b]$ ist nach 4.9.0.1 gleich

$$L(Z) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung 3.6.6 existieren Zwischenstellen $p_i \in (x_{i-1}; x_i)$ mit

$$f'(p_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Die Summe

$$L(Z) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + f'(p_i)^2}(x_i - x_{i-1})$$

ist eine sogenannte Riemannsumme, eine Zwischenstellensumme die zwischen der Unter- und der Obersumme der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{1+f'(x)}$ liegt, welche nach Voraussetzung stetig ist. Das heißt, es gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \inf g[x_{i-1};x_i](x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{k} g(p_i)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sup g[x_{i-1};x_i](x_i - x_{i-1}).$$

Die Funktion g ist integrierbar, weil sie stetig auf $[a;b]$ ist. Somit streben diese Summen für jede Zerlegungsnullfolge von $[a;b]$ gegen

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{d}x.$$

$\square$

Beispiel 4.9.3. (1) Für $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cosh(x)$ ist

$$B(f) = \int_a^b \sqrt{1+\sinh(x)^2}\ \mathrm{d}x = \int_a^b \cosh(x)\ \mathrm{d}x = \sinh(b) - \sinh(a).$$

(2) Die Bogenlänge von $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ ist

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\ \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \mathrm{d}x.$$

Mit

$$u = 1+\frac{9}{4}x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}u = \frac{9}{4}\ \mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \frac{4}{9}\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$x: 0 \to 1, \quad u: 1 \to \frac{13}{4}$$

ergibt das

$$\frac{4}{9}\int_1^{\frac{13}{4}} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

(3) Der Graph der Funktion $f:[-1;1] \to [0;1]$ mit

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist die obere Hälfte des Einheitskreises. Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = -2x\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Länge des Viertelkreises ist

$$\int_0^{1-} \sqrt{1+f'(t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{1-} \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\ \mathrm{d}t = \int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t.$$

Nach Beispiel 4.8.3 ist
$$\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 2.$$
$$\text{Aus}\quad 0 < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$
folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ existiert und kleiner als 2 ist. Da f eine gerade Funktion ist, d.h. $f(x) = f(-x)$, folgt aus Gründen der Symmetrie, dass linker und rechter Viertelkreis dieselbe Länge haben: $\int_{-1+}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Dies folgt formal aus der Substitution $u = -t$.

Dass die Länge des Vierteleinheitskreises kleiner als 2 und die Länge des Halbkreises kleiner als 4 ist, lässt sich veranschaulichen, wenn der Halbkreis mit einem Rechteck mit Seitenlängen 1 und 2 umschrieben wird.

Definition 4.9.4.
$$\pi := \int_{-1+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$
Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt $\pi < 4$.

4.10. Trigonometrische Funktion

Die Bogenlänge $b(x)$ zur Stelle x wird auf dem Einheitskreis rechts beginnend gegen den Uhrzeigersinn gemessen, siehe Abbildung 8.

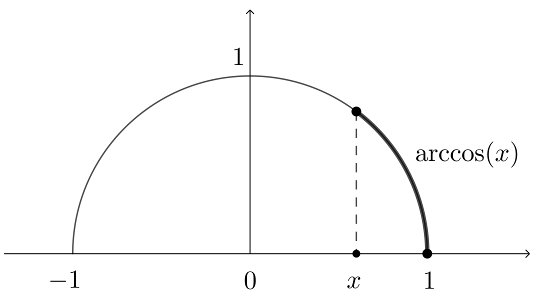

Abbildung 7. Bogenlänge

Definition 4.10.1. Der *Arkuskosinus* $\arccos(x)$ bzw. *Bogenlänge* zur Stelle x ist
$$\arccos(x) := \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Satz 4.10.2. *Die Bogenlänge des Einheitskreises* $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$ *ist stetig, streng monoton fallend und somit bijektiv, auf* $(-1;1)$ *differenzierbar,* $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ *und* $\arccos(1) = 0$.

Beweis. Der Integrand der Bogenlänge ist stetig und nach dem Hauptsatz 4.6.1 ist b auf $(-1;1)$ differenzierbar.

Dass b streng fallend ist, folgt aus der Termdarstelllung mit einem stetigen streng positiven Integranden. Die Stetigkeit von b in den Randstellen

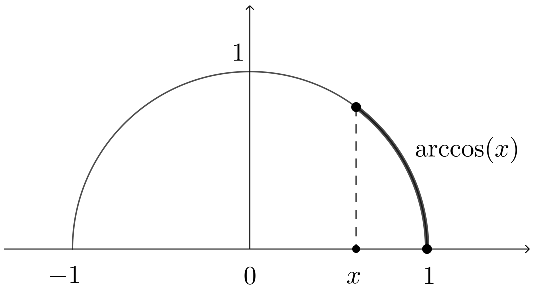

ABBILDUNG 8. Bogenlänge bzw. Arkuskosinus

folgt aus der Existenz der uneigentlichen Integrale (Beispiel 4.9.3.3). Die Werte von b an den Stellen -1, 0 und 1 leiten sich aus der Definition von π und die Bijektivität von b folgt aus der Stetigkeit, der strengen Monotonie und aus den Werten von b an den Randstellen. $\square$

DEFINITION 4.10.3. Die Funktionen *Kosinus* und *Sinus* sind auf $[0;\pi]$ definiert durch $\cos t := \arccos^{-1}(t)$ und $\sin t := \sqrt{1-\cos^2 t}$.

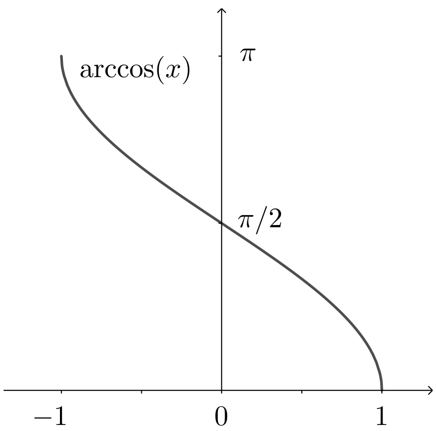

ABBILDUNG 9. Arkuskosinus

SATZ 4.10.4. *Cosinus und Sinus sind auf* $(0;\pi)$ *differenzierbar und in den Randstellen auch stetig. Es gilt* $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$ *und*

$$\cos' t = -\sin t, \quad \sin' t = \cos t.$$

BEWEIS. Nach Satz 4.10.2 ist arccos streng monoton und differenzierbar auf $(-1;1)$. Daher folgt aus Satz 3.5.1 über die Ableitung von Umkehrfunktionen, dass $\arccos^{-1} = \cos$ differenzierbar auf $(-1;1)$ ist und dass für die Ableitung für $x = \cos t$ gilt

$$\cos' t = \left(\arccos^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\arccos'(x)} = -\sqrt{1-x^2} = -\sin t.$$

Nach der Kettenregel ist die Zusammensetzung von differenzierbaren Funktionen differenzierbar, daher ist der Sinus ebenfalls differenzierbar auf $(0;\pi)$ und

$$\sin' t = \left(\sqrt{1-\cos t}\right)' = \frac{-2\cos t(-\sin t)}{2\sqrt{1-\cos^2 t}} = \cos t.$$

Die Stetigkeit in den Randstellen folgt aus der Existenz des uneigentlichen Integrals $\arccos(-1)$ und $\arccos(1)$. □

Die Differenzierbarkeit von Cosinus und Sinus an den Randstellen folgt aus allgemeinen Überlegungen:

Definition 4.10.5. Ein reelle Funktion f hat in p eine *Sprungstelle*, wenn zumindest einer der Grenzwerte

$$\lim_{x\to p-} f(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to p+} f(x)$$

existiert und ungleich $f(p)$ ist.

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, wie Unstetigkeiten entstehen können: Entweder liegt eine Sprungstelle vor, oder der Grenzwert der Funktion an der Stelle existiert nicht (siehe Beispiel 4.11.2), wobei auch beide Phänomene an einer Stelle auftreten können.

Satz 4.10.6. *Wenn* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* $(a;b)$ *differenzierbar ist und* $\lim_{x\to b-} f'(x)$ *existiert, dann ist* f *in* b *differenzierbar und* $f'(b) = \lim_{x\to b-} f'(x)$. *Eine analoge Aussage gilt für* a.

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung 3.6.6 gibt es für alle $x \in (a;b)$ ein $p_x \in (x;b)$ mit

$$f'(p_x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{x\to b} f'(p_x) = \lim_{x\to b} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(b).$$

Gleiches gilt für die linke Grenze a. □

Satz 4.10.7. *Eine Ableitungsfunktion, die auf einem Intervall definiert ist, hat keine Sprungstellen. Eine Funktion, die auf einem Intervall definiert ist und eine Sprungstelle hat, besitzt keine Stammfunktion.*

Beweis. Wenn f' einem Intervall I definiert ist und in $p \in I$ eine Sprungstelle hat, muss nach Definition 4.10.5 entweder $\lim_{x\to p-} f'(x)$ oder $\lim_{x\to p+} f'(x)$ existieren und ungleich $f'(p)$ sein, was aber nach Satz 4.10.6 nicht möglich ist.

Eine Funktion mit Stammfunktion auf einem Intervall ist Ableitung der Stammfunktion und kann daher keine Sprungstelle haben. □

Der folgende Satz ist eine weitere Folgerung aus Satz 4.10.6.

Satz 4.10.8. *Cosinus und Sinus sind auch an den Randstellen von* $[0;\pi]$ *differenzierbar. Die Werte der Ableitungen an den Rändern setzen die Ableingsfunktionen im Inneren des Intervalls stetig fort:*

$$\cos' 0 = -\sin 0 = 0, \quad \sin' 0 = \cos 0 = 1,$$

$$\cos' \pi = -\sin \pi = 0, \quad \sin' \pi = \cos \pi = -1.$$

Definition 4.10.9. Für $t \in [-\pi; 0)$ sei

$$\cos t := \cos(-t) \quad \text{und} \quad \sin t = -\sin(-t).$$

Satz 4.10.10. *Cosinus und Sinus sind auf* $[-\pi;\pi]$ *differenzierbar und es ist* $\cos' t = -\sin t$ *und* $\sin' t = \cos t$.

Beweis. Die Differenzierbarkeit der Funktionen auf $[-\pi;0)$ folgt aus der Differenzierbarkeit auf $(0;\pi]$. Die Differenzierbarkeit in 0 folgt mit Satz 4.10.6 aus

$$\lim_{t\to 0-}\cos' t = \lim_{t\to 0+}\cos' t = \lim_{t\to 0}(-\sin t) = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{t\to 0-}\sin' t = \lim_{t\to 0+}\sin' t = \lim_{t\to 0}\cos t = 1.$$

□

Definition 4.10.11. Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist *periodisch mit Periode* p, wenn $f(x+p) = f(x)$ für alle x.

Definition 4.10.12. Für $n \in \mathbb{Z}^*$ und $t \in [-\pi;\pi]$ sei

$$\cos(t+n2\pi) := \cos(t) \quad \text{und} \quad \sin(t+n2\pi) := \sin(t).$$

Die so definierten Funktionen Cosinus und Sinus sind Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit kleinster Periode 2π und es folgt wie zuvor:

Satz 4.10.13. *Cosinus und Sinus sind auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar und es ist* $\cos' t = -\sin t$ *und* $\sin' t = \cos t$.

Beispiel 4.10.14. Die Fläche eines Viertelkreises mit Radius r kann als Integral bestimmt werden:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\ \mathrm{d}x = r\int_0^r \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\ \mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned} \sin u &= \frac{x}{r} & \qquad\qquad x &: 0 \to r \\ \cos u\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{r}\ \mathrm{d}x & u &: 0 \to \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= r\int_0^r \sqrt{1-\sin^2 u}\ \mathrm{d}x = r\int_0^r \cos u\ \mathrm{d}x = r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\ \mathrm{d}u.$$

Letzteres Integral wird mit Strategie C aus Schulmathematik und Anschauung 4.7.8 (Strategien zur partiellen Integraltion) bestimmt:

$$\int \cos^2 u\ \mathrm{d}u = \cos u \sin u - \int \sin u(-\sin u)\ \mathrm{d}u =$$

$$\cos u\sin u + \int (1-\cos^2 u)\ \mathrm{d}u = \cos u \sin u + u - \int \cos^2 u\ \mathrm{d}u,$$

$$2\int \cos^2 u\ \mathrm{d}u = \cos u \sin u + u,$$

$$\int \cos^2 u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\cos u\sin u + u) + c.$$

$$r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\ \mathrm{d}u = r^2\frac{1}{2}(\cos u \sin u + u)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{r^2\pi}{4}.$$

Die Fläche des ganzen Kreises ist somit $r^2\pi$.

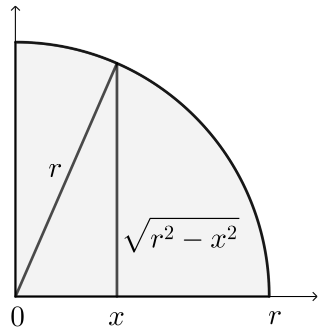

ABBILDUNG 10. Viertelkreisfläche

ÜBUNGSAUFGABE 4.10.15 (Übungsaufgabe 80). Überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen für die Regel von de l'Hospital erfüllt sind und bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{x} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.10.16 (Übungsaufgabe 81). Formen Sie die Terme so um, dass Sie die Regel von de l'Hospital (mehrfach) anwenden können und bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right).$$

Aus den Ergebnissen von (a) und (b) kann man sofort den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

erkennen.

ÜBUNGSAUFGABE 4.10.17 (Übungsaufgabe 82). Bestimmen Sie die Integrale durch partielle Integration.

$$\text{(a)} \quad \int x \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \quad \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.10.18 (Übungsaufgabe 83). Bestimmen Sie die Integrale mit einer geeigneten Substitution.

$$\text{(a)} \quad \int \sin^3 x \, \mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \quad \int \tan x \, \mathrm{d}x.$$

4.11. Funktionen mit Oszillationsstellen

DEFINITION 4.11.1. Ein nicht leeres Intervall I im Definitionsbereich einer reellen Funktion f heißt *Monotoniebereich*, wenn f auf I monoton ist und I maximal mit dieser Eigenschaft ist. Das heißt, wenn J ein Intervall ist im Definitionsbereich ist, das I als echte Teilmenge enthält, dann ist f auf J nicht monoton.

Besteht ein Intervall aus unendlich vielen Monotoniebereichen, heißen die Häufungspunkte der Grenzen der Monotoniebereiche *Oszillationsstellen*.

Gilt $\lim_{x \to p\pm} g(x) = \pm\infty$, haben $\sin(g(x))$ und $\cos(g(x))$ in p eine Oszillationsstelle. Zahlreiche interessante Funktionen, die gelegentlich auch Gegenbeispiele zu falschen Anschauungen oder Vermutungen sind, lassen sich damit konstruieren.

Beispiel 4.11.2. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x|^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Der Graph von f ist begrenzt durch die Graphen der Funktionen g_+ und g_- mit $g_\pm(x) = \pm|x|^a$ und $g_\pm(0) = 0$. Wegen

$$\cos\frac{1}{x} = 1 \iff \frac{1}{x} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{1}{2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{und}$$

$$\cos\frac{1}{x} = -1 \iff \frac{1}{x} = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{1}{(2k+1)\pi},\ k \in \mathbb{Z}$$

berührt der Graph von f den Graphen von g_+ an den Stellen $x = \frac{1}{2k\pi}$ und den Graphen von g_+ in $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$.

(1) Für $a \leq 0$ hat f in $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle, auch wenn der Graph von f zusammenhängend ist. Eine Menge heißt *unzusammenhängend*, wenn sie sich als Vereinigung zweier disjunkter nicht leerer offener Mengen darstellen lässt udn sie heißt *zusammenhängend*, wenn dies nicht möglich ist. Der Graph jeder auf einem Intervall stetigen Funktion ist zusammenhängend. So sind $f(\mathbb{R}^+)$ und $f(\mathbb{R}^-)$ zusammenhängend. Die Umkehrung gilt nicht: Weil ein Graph zusammenhängend ist, bedeutet das nicht unbedingt, dass die Funktion stetig ist. Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die $f(\mathbb{R}^+)$ oder $f(\mathbb{R}^-)$ enthält, muss auch den Punkt $(0, f(0)) = (0, 0)$ enthalten, denn $(0, 0)$ ist sowohl ein Häufungspunkt von $f(\mathbb{R}^+)$ als auch von $f(\mathbb{R}^-)$. Für $a = 0$ ist der Graph von f in Abbildung 11 mit unterschiedlicher Skalierung der x-Achse. Dieses Beispiel zeigt, dass es falsch wäre, stetige Funktionen auf Intervallen als Funktionen zu definieren, deren Graph zusammenhängend ist, siehe Schulmathematik und Anschauung 2.2.1 zur Stetigkeit.

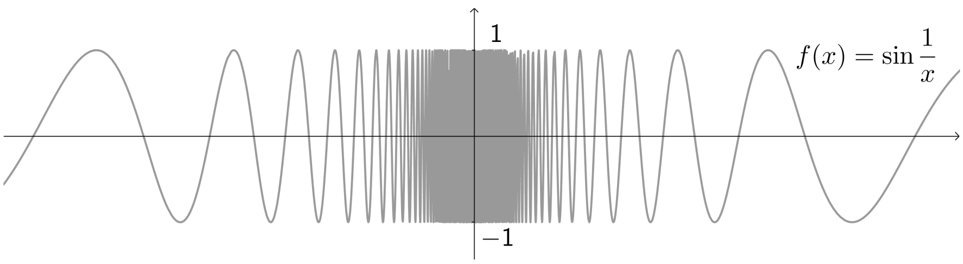

Abbildung 11. Unstetigkeit trotz zusammenhängendem Graphen

(2) Für $a > 0$ ist

$$\lim_{x \to 0} |x|^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

weil nach Satz 1.16.2 Produkte von Nullfolgen mit beschränkten Folgen Nullfolgen sind. Das heißt, f ist auch stetig in $x = 0$. Der Differenzialquotient in $x = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0}|h|^{a-1}\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

existiert und ist gleich 0, wenn $a > 1$ ist, dann ist $f'(0) = 0$. Für $a \leq 1$ existiert der Grenzwert nicht und f ist nicht differenzierbar in $x = 0$. Wenn also $0 < a \leq 1$ ist, dann ist f in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

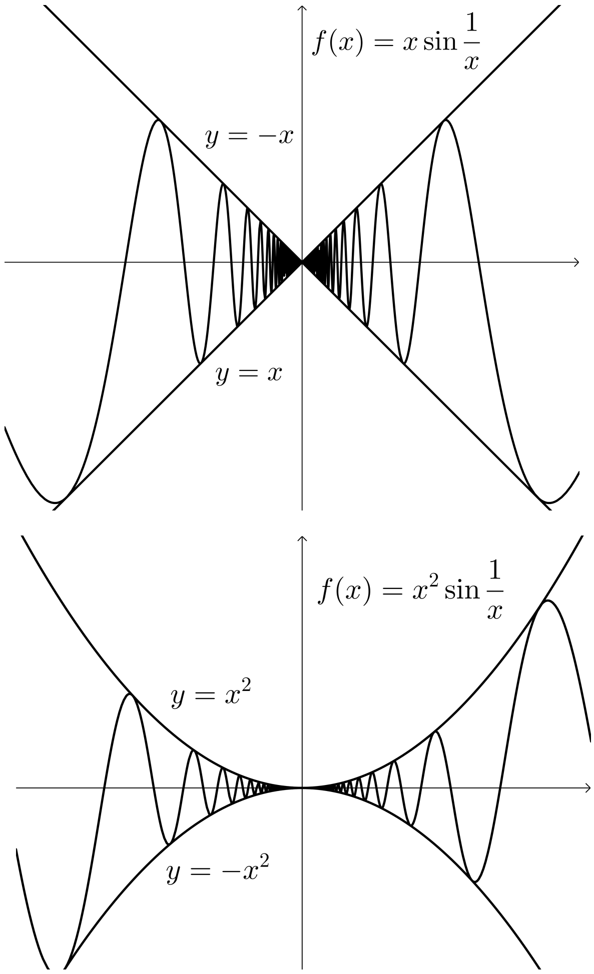

Abbildung 12. Differenzierbarkeit in $x = 0$

Für $x \neq 0$ ist wegen $(|x|^a)' = \operatorname{sign}(x)a|x|^{a-1} = ax|x|^{a-2}$

$$f'(x) = ax|x|^{a-2}\sin\frac{1}{x} + |x|^a\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = |x|^{a-2}\left(xa\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert nur, wenn $a \geq 2$ ist. Es wäre eine falsche Anwendung von Satz 4.10.6, zu folgern, dass f in 0 nicht differenzierbar sei, wenn $a < 2$ ist. Tatsächlich muss der Differentialquotient an der Stelle $x = 0$ separat betrachtet werden.

Eine Funktion auf einem Intervall I ist in $p \in I$ genau dann differenzierbar, wenn es eine Zahl $f'(p)$ gibt, sodass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\delta(p)$ gibt, sodass der Graph von f auf $U_\delta(p)\setminus\{p\}$ zwischen den beiden Geraden liegt, die durch den Punkt $(p, f(p))$ gehen und die Steigungen $f'(p)+\varepsilon$

und $f'(p) - \varepsilon$ haben, siehe Abbildung 13. Graphen differenzierbarer Funktionen können also durch beliebig annähernd parallele Geradenpaare lokal eingeschlossen werden.

Ob f' stetig ist oder nicht, hängt von ihrem Verlauf außerhalb von p ab. Für $a < 1 \leq 2$ ist f zwar in $x = 0$ differenzierbar und der Graph kann an dieser Stelle durch annähernd waagrechte Geradenpaare lokal eingeschlossen werden, doch oszilliert f so stark, dass die Ableitungsfunktion f' nicht stetig in $x = 0$ ist.

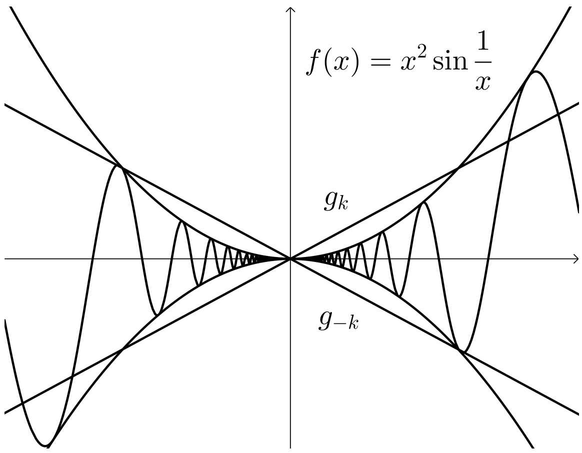

ABBILDUNG 13. Geometrisches Differenzierbarkeitskriterium

BEISPIEL 4.11.3. Nach entsprechender Manipulation von Funktionen wie in Beispiel 4.11.2 können Oszillationsstellen konstruiert werden, die zugleich Extremstellen sind, siehe Abbildung 14. Oszilliert $x^2 \cos(1/x)$ zwischen $-x^2$ und x^2, so oszilliert $x^2 \cos(1/x) + x^2$ zwischen 0 und $2x^2$. Und f mit

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} + 2x^2 = x^2 \left(\cos \frac{1}{x} + 2 \right)$$

und $f(0) = 0$ oszilliert zwischen x^2 und $3x^2$. Diese Funktion hat in $x = 0$ einen Tiefpunkt, in dem sie auch differenzierbar ist:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} h \left(\cos \frac{1}{h} + 2 \right) = 0.$$

Es ist also nicht möglich, lokale Extremstellen über einen Monotoniewechsel zu definieren, auch wenn dies in letzten Jahren in der Schulmathematik populär wurde, siehe Schulmathematik und Anschauung 3.6.2 (Lokale Extremstellen).

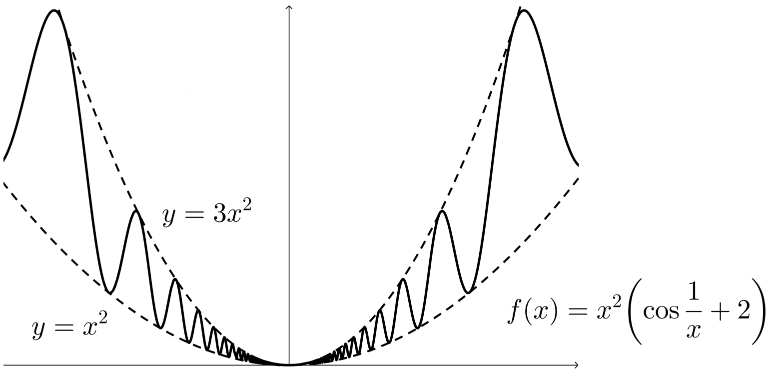

ABBILDUNG 14. Tiefpunkt ohne Monotoniewechsel

KAPITEL 5

Potenzreihen

5.1. Lokale Approximation durch Polynome

Eine reelle Funktion f soll in einer Umgebung einer Zahl x_0 lokal durch möglichst einfache Funktionen T_n approximiert werden. Dabei sollen die ersten n Ableitungen von f mit jenen von T_n übereinstimmen. Dass die entsprechenden Ableitungen von f existieren, wird vorausgesetzt.

Für $n = 0$ bedeutet das nur, dass die Funktionswerte an der x_0 übereinstimmen, da die nullte Ableitung von f ist per Defintion gleich f ist. Also ist T_0 konstant und

$$T_0(x) = f(x_0).$$

Die Funktion T_1 muss mit f in x_0 außerdem die gleiche Steigungen haben. Also ist

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

So ist $T_1(x_0) = f(x_0)$ und $T_1'(x_0) = f'(x_0)$. Mit T_2 stimmt f an der Stelle x_0 zusätzlich in der zweiten Ableitung überein. Daher ist

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Für $n = 3$ gilt

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}(x - x_0)^3$$

und allgemein ist

$$T_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{bzw.}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Es stellt sich also heraus, dass die zuvor erwähnten möglichst einfachen Funktionen T_n Polynomfunktionen vom Grad n sind, wobei sich T_n aus T_{n-1} durch Addieren des Terms

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ergibt. Das Polynom T_n (auch mit T_{n,x_0} bezeichnet) heißt *n-tes Taylorpolynom* (bzw. *Taylorpolynomfunktion*) *von f an der Stelle x_0.*

SATZ 5.1.1 (Satz von Taylor für Polynomfunktionen). *Eine reelle Polynomfunktion f vom Grad n stimmt f für jedes x_0 mit der Taylorpolynomfunktion T_{n,x_0} überein. Das heißt, es gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

BEWEIS. Für die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

gibt Zahlen b_k, sodass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k$$

ist. Die lässt sich zum Beisiel durch einen Koeffizientenvergleich zeigen. Am einfachsten beginnt man dabei mit der höchsten Potenz x^n. Von diesen b_k ist zu zeigen, dass sie gleich $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ sind. Für $x = x_0$ folgt sofort $b_0 = f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j\right)' = \sum_{j=1}^{n} j b_j (x - x_0)^{j-1} \\
&\implies 1 \cdot b_1 = f'(x_0). \\
f''(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j\right)'' = \sum_{j=2}^{n} j(j-1) b_j (x - x_0)^{j-2} \\
&\implies 2 \cdot 1 \cdot b_2 = f''(x_0) \\
f'''(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j\right)''' = \sum_{j=3}^{n} j(j-1)(j-2) b_j (x - x_0)^{j-3} \\
&\implies 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_3 = f'''(x_0) \quad \text{etc.} \\
f^{(k)}(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j\right)^{(k)} = \sum_{j=k}^{n} j(j-1)\dots(j-k+1) b_j (x - x_0)^{j-k} \\
&\implies k! b_k = f^{(k)}(x_0).
\end{aligned}$$

□

5.2. Satz von Taylor

Polynomfunktionen vom Grad n stimmen nach Satz 5.1.1 mit der Taylorpolynomfunktion vom Grad n unabhängig von der gewählten Approximationsstelle x_0 vollkommen überein. Interessanter ist es, Funktionen, die keine Polynomfunktionen sind, wie die Exponentialfunktion, Logarithmen oder Sinus- und Kosinusfunktionen durch Taylorpolynome zu approximieren. Wie groß dabei der Approximationsfehler sein kann, sagt der Satz von Taylor.

Man sagt: Die Funktion f wird um x_0 entwickelt. Diese Formulierung kommt von (meist unendlichen) Taylorreihen in $\mathbb{C}$.

SATZ 5.2.1 (Satz von Taylor). *Es sei f eine $(n+1)$-mal steitig differenzierbar reelle Funktion auf einem Intervall I und $x_0 \in I$. Dann ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

BEWEIS. Bewiesen wird der Satz mit Induktion nach n. Für $n = 0$ ist dies der zweite Teil des Hauptsatzes 4.6.1.2 :

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Der Fall $n = 0$ lässt sich auch mit partieller Integration zeigen:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t = f(t)\cdot 1\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f'(t)\cdot 0\,\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0).$$

Es sei nun $n \geq 1$ und die Aussage des Satzes erfüllt für alle kleineren natürlichen Zahlen. □

BEISPIEL 5.2.2. Wenn f mit $f(x) = 5x^2 - 12x - 4$ um $x_0 = 3$ entwickelt wird, erhält man

$$f(x) = 5 + 18(x-3) + 10\frac{(x-3)^2}{2}.$$

BEWEIS.

$$f(3) = 5,$$
$$f'(x) = 10x - 12, \quad f'(3) = 18,$$
$$f''(x) = 10, \quad f''(3) = 10.$$

□

5.3. Taylorreihen

Literaturverzeichnis

[1] M. Balluch, *Die Kontinuität von Bewusstsein*, Guthmann-Peterson, 2005.

[2] B. Bogensperger, *Die Neue Mathematik und was von ihr übrig blieb*, Diplomarbeit, Univ. Wien, 2014.

[3] K. Endl, W. Luh, *Analysis*, Bd. 1, Aula, 9. Aufl. 2008.

[4] E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930. Verfügbar unter `http://www.cs.ru.nl/ freek/aut/grundlagen-1.0.tar.gz` (9.4.2013)

[5] I.M. Pepperberg, *The Alex Studies. Cognitive and Communicative Abilities of Grey Parrots*, Harvard University Press 2002.

[6] C.C. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer 2002.

[7] W. Rudin, *Analysis,* Oldenbourg, 4. Aufl. 2009.

[8] W. Rudin, *Pinciples of modern Analysis,* McGraw-Hill, 1953.

[9] W. Rudin, *Pinciples of modern Analysis,* McGraw-Hill, 3. Aufl. 1976.

[10] H. Schichl, R. Steinbauer, *Einführung in das mathematische Arbeiten*, 2. Auflage, Springer 2012.