Zur Verfügung gestellt von:
Bernhard Lamel
UE Analysis, SoSe 2016
LV-Nr.: 250004
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

DIFFERENTIALRECHNUNG I

(1) Seien $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q \neq 0$ Polynome. Zeigen Sie, dass die rationale Funktion $R\colon \{x \in \mathbb{R}\colon q(x) \neq 0\} =: D \to \mathbb{R}$, welche durch
$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$
definiert ist, in jedem Punkt $x_0 \in D$ unendlich oft differenzierbar ist.

(2) Zeigen Sie die verallgemeinerte Produktregel: Wenn $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $g\colon X \to \mathbb{R}$ beide k-mal differenzierbar im Punkt x sind, so ist $fg\colon X \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 auch k-mal differenzierbar, und es gilt
$$(fg)^{(k)}(x_0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}(x_0) g^{(k-j)}(x_0).$$

(3) Berechnen Sie die Ableitung von der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch
$$f(x) = \left(1 - x + 3x^2 - 4x^3\right)^{125} (5x+4)^2$$
gegeben ist.

(4) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion, die im Punkt 0 stetig, aber nicht differenzierbar ist. (Vergessen Sie nicht, ihre Antwort ausführlich zu begründen).

(5) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion auf dem Intervall $[0,1]$, welche nicht als Ableitung einer differenzierbaren Funktion auftreten kann.

(6) Zeigen sie den *verallgemeinerten Mittelwertsatz*: Wenn $f, g \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ sind, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$, für welches
$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$
ist. (Hinweis: Adaptieren sie die Hilfsfunktion aus dem Beweis des Mittelwertsatzes für das Problem.)

(7) Zeigen Sie: Wenn $f, g\colon (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, und $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ ist, so gilt, dass
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
falls der zweite Grenzwert existiert.

(8) Sei $r = p/q \in \mathbb{Q}$. Berechnen Sie (detailliert begründet, unter Verwendung des Satzes über inverse Funktionen) die Ableitung der Potenzfunktion $x \mapsto x^r$, welche für $x \in \mathbb{R}_+$ definiert ist.

(9) Berechnen Sie, unter der Annahme, dass $y(x)$ die Gleichung $xy(x)^2 + y(x) - 1 = 0$ erfüllt, die Ableitung $y'(x)$ (ihre Antwort sollte von der Form $y'(x) = G(x, y(x))$ sein).

(10) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion
$$x \mapsto \left(x^2 + x^4 - 2\right)^{\frac{1}{3}}.$$
(Zu dieser Frage gehört die Bestimmung des Bereiches, wo die gegebene Funktion definiert und differenzierbar ist!)

Date: April 2016.

Zur Verfügung gestellt von:
Bernhard Lamel
UE Analysis, SoSe 2016
LV-Nr.: 250004
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

DIFFERENTIALRECHNUNG II/RIEMANNINTEGRAL I

(11) Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen, um den Satz über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen herzuleiten (d.h. unter welchen Bedingungen können Sie die Gleichung $f(y) = x$ nach y auflösen?)

(12) Zeigen Sie: Wenn $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex und strikt monoton wachsend ist, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} konkav.

(13) Sei $p(x) = x^2 + bx + c$, wo $b, c \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie unter Verwendung des Taylorschen Lehrsatzes, für gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}$, $p(x)$ als Polynom in $(x - x_0)$ an.

(14) Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um $\sqrt{3}$ auf 4 Nachkommastellen genau zu bestimmen (und erklären Sie, warum Sie diese Fehlerabschätzung garantieren können!)

(15) Angenommen $f \in C^\infty([-1/2, 1/2])$ erfüllt die Abschätzung $|f^{(j)}(x)| \leq 2^j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, und $x \in [-1/2, 1/2]$. Für welches k können Sie garantieren, dass das Taylorpolynom $T_0^k f(x)$ der Ordnung k im Punkt $x_0 = 0$ für jedes $x \in [-1/2, 1/2]$ die Ungleichung
$$\left| f(x) - T_0^k f(x) \right| \leq \frac{1}{10^4}$$
erfüllt?

(16) Sei $f \in C^3([-1,1])$ eine Funktion mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1/2$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_0^2 f$ der Ordnung 2 im Punkt 0. Angenommen, $|f^{(3)}(x)| < 1$ für $x \in [-1,1]$. Bestimmen Sie ein Teilintervall $(-\delta, \delta) \subset [-1,1]$ auf dem Sie die Abschätzung $|f(x) - T_0^2 f(x)| < 10^{-5}$ garantieren können.

(17) Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche durch
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{p}{2^k} \text{ für } p, k \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq p \leq 2^k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
nicht Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[0,1]$ ist.

(18) Berechnen Sie unter der Verwendung von Riemannsummen bezüglich äquidistanter Unterteilungen das Integral $\int_0^1 x\,dx$.

(19) Zeigen Sie unter Verwendung von Riemannsummen (und der Cauchy-Schwarz Ungleichung für endliche Summen), dass wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft haben, dass f^2, g^2 und fg Riemann-integrierbar sind, dann
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2\,dx \right)$$
gilt.

(20) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $x_0 \in [a,b]$, $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren
$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ c & x = x_0. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass g auch Riemann-integrierbar ist.

Date: April 2016.

Zur Verfügung gestellt von:
Bernhard Lamel
UE Analysis, SoSe 2016
LV-Nr.: 250004
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

RIEMANNINTEGRAL II/EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTION

(21) Let $ab(a-b) \neq 0$ and consider the expression
$$\frac{x^a - x^b}{x^{1/b} - x^{1/a}}$$
which is defined for all $x > 0$ except for $x = 1$. Determine
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^a - x^b}{x^{1/b} - x^{1/a}}.$$

(22) Der *hyperbolische Sinus* und der *hyperbolische Cosinus* sind durch
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
definiert. Zeige die folgende Formeln:
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y).$$

(23) Zeige: der hyperbolische Sinus $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv und strikt monoton, und besitzt deswegen eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechne cosh(arsinh(x)).

(24) Es sei $ab \neq 0$ und
$$h(x) = \frac{\log\cosh ax}{\log\cosh bx}.$$
Man berechne : $\lim_{x\to 0} h(x)$ und $\lim_{x\to\infty} h(x)$.

(25) Man berechne :
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(26) Man berechne :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}.$$

(27) Man berechne :
$$\int \sqrt{5x-1}\, dx \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}.$$

(28) Berechne
$$\int \cosh(x)\, dx, \quad \int \sinh(x)\, dx.$$

(29)
$$\int (x^2+1)e^{2x-3}\, dx =$$

(30)
$$\int (x^2+2x)\sinh x\, dx =$$

(31) (Geeignete Substitution verwenden - erinnere die Formel $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$):
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

Date: April 2016.

(32) Mittels Partialbruchzerlegung berechne man

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}\,dx =$$

(33)

$$\int \frac{dx}{(2x-3)(4x+1)} =$$

(34) Let f be a continuous function on $[a,b]$ and suppose that $f \geq 0$ on $[a,b]$ and that $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Show that $f(x) = 0$ for all $x \in [a,b]$.

(35) Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$$

(36)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

(37)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$$

(38)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\cosh x} =$$

(39) Bestimme, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx$$

konvergiert.

(40) Bestimme, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx$$

konvergiert.

(41) Zeige, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

existiert. (Der Wert muss *noch nicht* bestimmt werden).

Zur Verfügung gestellt von:
Bernhard Lamel
UE Analysis, SoSe 2016
LV-Nr.: 250004
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

POTENZREIHEN/ELEMENTARE FUNKTIONEN

(42) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1-x)^\alpha$, für $\alpha \in \mathbb{R}$, reell-analytisch auf $(-1,1)$ ist.

(43) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f aus Bsp. 42 im Punkt 0, indem Sie die Taylorkoeffizienten bestimmen.

(44) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\arctan(x)$ im Punkt 0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

(45) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \frac{1-x}{3+x}$ im Punkt $x = -2$.

(46) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x) = \sin(2x)$ im Punkt π.

(47) Zeigen Sie, dass $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$ gilt (und bestimmen Sie, für welche x, y diese Gleichung gilt).

(48) Zeigen Sie, dass die Funktion f, welche durch

$$f(x) = \cot(x) - \frac{1}{x} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$$

auf $(-\pi,\pi) \setminus \{0\}$ definiert ist, eine stetige Fortsetzung F auf $(-\pi,\pi)$ besitzt. Zeigen Sie, dass $F \in C^\omega((-\pi,\pi))$ ist, indem Sie eine (konvergente) Potenzreihenentwicklung von F im Punkt 0 angeben.

(49) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\arcsin(x)$ im Punkt 0.

(50) Bestimmen Sie die komplexen Wurzeln des Polynoms $p(z) = z^n - 1$.

(51) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{j\pi}{n}} = 0$$

erfüllt ist.

(52) Zeigen Sie, dass ein trigonometrisches Polynom

$$p(x) = \sum_{j=-n}^{n} p_j^s \sin(jx) + \sum_{j=-n}^{n} p_j^c \cos(jx),$$

wo $p_j^s, p_j^c \in \mathbb{C}$ für $j = 1, \dots, n$, auch in der Form

$$p(x) = z^n q(z)|_{z=e^{ix}}$$

für ein Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $2n$ geschrieben werden kann.

(53) Bestimmen Sie $\sin(\arctan(x))$ rechnerisch und graphisch.

(54) Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)^2 dx.$$

(55) Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)^4 dx.$$

(56) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Date: Mai 2016.

(57) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

(58) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

(59) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

konvergiert. Konvergiert es absolut?

(60) Können Sie den Ausdruck

$$\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$$

vereinfachen?

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

FOURIERREIHEN

(61) Zeigen Sie: Die Fourierreihe einer geraden Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ (d.h. $f(-x) = f(x)$) ist eine reine Cosinusreihe; die Fourierreihe einer ungeraden Funktion $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ (d.h. $g(-x) = -g(x)$) ist einer reine Sinusreihe.

(62) Zeigen Sie: Die Fourierkoeffizienten c_k von

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

erfüllen $c_k = \bar{c}_{-k}$ genau dann, wenn f reellwertig ist.

In den folgenden Aufgaben berechnen Sie bitte die Fourierkoeffizienten und geben – soweit möglich – einen geschlossenen Ausdruck für die Fourierreihen der jeweils gegebenen Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ (bzw $\to \mathbb{R}$) an.

(63) $f(x) = x$
(64) $f(x) = \pi - |x|$
(65) $f(x) = x^2$
(66) $f(x) = \sin(14x) + 30\cos(25x)$
(67) $f(x) = e^{25ix} - 4e^{-17ix}$
(68) $f(x) = \sin(x)^2$
(69) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von f in den vorangehenden Beispielen (vor allem 63-65) in den Punkten 0, $\pi/2$, π?

Date: Juni 2016.