# Lösungsvorschläge zur ersten Vorlesungsprüfung zur Analysis 1

## Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Der Test dauert 90 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

## Resultat

| Beispiel | Mögliche Punkte | Erreichte Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 5 | |
| 2 | 5 | |
| 3 | 5 | |
| 4 | 5 | |
| 5 | 5 | |
| Total | 25 | |

***Beispiel 1 (5 Punkte).***
Bestimmen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha \colon [0, +\infty[ \to \mathbb{R},\ f_\alpha(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

Lipschitz-stetig ist, und geben Sie gegebenenfalls eine Lipschitz-Konstante an.

---

***Lösung.***
*Wir berechnen die Ableitung von $f_\alpha$ außerhalb von 0 und finden für alle $x \neq 0$:*

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(\tfrac{1}{x}) - x^{\alpha-2} \cos(\tfrac{1}{x}).$$

**$\alpha \leqslant 0$:** *Wir bemerken, daß die Funktion für $\alpha \leqslant 0$ im Nullpunkt nicht stetig und damit auch nicht Lipschitz-stetig ist.*

**$\alpha > 2$:** *Aus der Formel für die Ableitung sehen wir, daß $f'_\alpha$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ für $\alpha > 2$ unbeschränkt ist, da wegen $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$*

$$\lim_{x\to+\infty} |f'_\alpha(x)| = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2} \big|\alpha x \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})\big| = +\infty$$

*gilt. Daher ist $f_\alpha$ für $\alpha > 2$ ebenfalls nicht Lipschitz-stetig.*

**$0 < \alpha < 2$:** *Andererseits gilt für $\alpha \in ]0, 2[$ für die durch $x_n := \frac{1}{2\pi n}$ gegebene Nullfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$:*

$$\lim_{n\to\infty} |f'_\alpha(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^{2-\alpha}} |\alpha x_n \sin(\tfrac{1}{x_n}) - \cos(\tfrac{1}{x_n})| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^{2-\alpha}} = +\infty,$$

*so daß auch in dem Fall die Ableitung unbeschränkt und die Funktion daher nicht Lipschitz-stetig ist.*

**$\alpha = 2$:** *Es bleibt der Fall $\alpha = 2$. Wir sehen, daß $f_2$ im Nullpunkt differenzierbar ist mit*

$$f'_2(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

*Somit ist die Ableitung wegen $|\sin(y)| \leqslant |y|$ für alle $y \in \mathbb{R}$ durch*

$$|f'_2(x)| = \big|2x \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})\big| \leqslant 3$$

*beschränkt, weshalb $f_2$ mit der Lipschitz-Konstante 3 eine Lipschitz-stetige Funktion ist.*

***Beispiel 2 (5 Punkte).***
Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktionenfolgen

***(a)*** $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$

***(b)*** $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $g_n\colon ]0,1[ \to \mathbb{R},\ g_n(x) := \sqrt[n]{x}$

und geben Sie an, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

---

***Lösung.***

***(a)*** Für $x = 0$ haben wir die konstante Folge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, also ist $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Und für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bekommen wir:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y},$$

was uns mit der Regel von de L'Hospital zu

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{y\to 0} \cos(y) = 1$$

bringt.

Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, da etwa

$$f_n(\pi n) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0, \text{ also } \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 1| \geqslant 1 - f_n(\pi n) = 1 > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

gilt.

***(b)*** Bekanntlich haben wir für jeden Wert $x \in ]0,1[$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Wiederum ist der Grenzwert jedoch nicht gleichmäßig, da wir zum Beispiel die Abschätzung

$$\sup_{x\in]0,1[} |g_n(x) - 1| \geqslant 1 - g_n(n^{-n}) = 1 - \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$$

haben.

***Beispiel 3 (5 Punkte).***
Bestimmen Sie

***(a)*** alle lokalen Minimalstellen,

***(b)*** alle lokalen Maximalstellen und

***(c)*** alle globalen Extremalstellen

der Funktion

$$f\colon [-\tfrac{1}{2}, +\infty[ \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{|x^2-1|} - x^2.$$

---

***Lösung.***
*Wir bemerken zuerst, daß $f$ auf $]-\frac{1}{2}, +\infty[\setminus\{1\}$ beliebig oft differenzierbar ist. Die einzigen Kandidaten für Extremalstellen sind daher neben den kritischen Punkten von $f$ in $]-\frac{1}{2}, +\infty[\setminus\{1\}$ der Randpunkt $-\frac{1}{2}$ und der singuläre Punkt $1$.*

- *Die kritischen Punkte von $f$ sind Lösungen $x \in\, ]-\frac{1}{2}, +\infty[\setminus\{1\}$ der Gleichung*

$$0 = f'(x) = \begin{cases} x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - 2\right) & \text{für } x > 1, \\ -x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\right) & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

  *Für $x > 1$ bedeutet das $x^2 - 1 = \frac{1}{4}$, also $x = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, und für $x < 1$ haben wir die Lösung $x = 0$.*

- *Da wir aus der Darstellung der Ableitung sehen, daß $f'(x) > 0$ ist für $x \in\, ]-\frac{1}{2}, 0[\, \cup\, ]1, \frac{1}{2}\sqrt{5}[$ und wir $f'(x) < 0$ haben für $x \in\, ]0, 1[\, \cup\, ]\frac{1}{2}\sqrt{5}, +\infty[$, so folgt, daß die lokalen Minima in $-\frac{1}{2}$ und $1$ sind und die lokalen Maxima in $0$ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ zu finden sind.*

- *Wegen*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right) = -\infty$$

  *kann es kein globales Minimum geben. Für das wegen der Stetigkeit von $f$ zwangsläufig existierende globale Maximum kommen nur die beiden lokalen Maximalstellen $0$ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ in Frage und wegen*

$$f(\tfrac{1}{2}\sqrt{5}) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} < 1 = f(0)$$

  *wird das globale Maximum daher nur im Punkt $0$ angenommen.*

*Zusammenfassend haben wir also*

***(a)*** *die lokalen Minimalstellen $-\frac{1}{2}$ und $1$,*

***(b)*** *die lokalen Maximalstellen $0$ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und*

***(c)*** *das globale Maximum in $0$.*

***Beispiel 4 (5 Punkte).***
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

***(a)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\arctan(n)-\frac{\pi}{2}\right)^{2n} z^n,$

***(b)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!}z^n.$

---

***Lösung.***

***(a)*** Aus dem Wurzelkriterium bekommen wir wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\arctan(n)-\frac{\pi}{2}\right)^{2n} z^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\arctan(n)-\frac{\pi}{2}\right)^{2}|z| = 0 < 1,$$

daß die Reihe für beliebige Werte $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, der Konvergenzradius also $+\infty$ ist.

***(b)*** Mit dem Quotientenkriterium folgt aus

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+1)^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n+2)!}z^{n+1}}{\frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!}z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}{(1-\frac{1}{2n})^{2n}}\frac{(2n+1)(2n-1)}{4(2n+1)(2n+2)}|z| = \frac{e^2}{4}|z|,$$

daß die Reihe für $|z| < \frac{4}{e^2}$ konvergiert und für $|z| > \frac{4}{e^2}$ divergiert, weshalb der Konvergenzradius gerade $\frac{4}{e^2}$ ist.

***Beispiel 5 (5 Punkte).***
Berechnen Sie die Integrale

***(a)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$ und

***(b)*** $\displaystyle\int_0^1 \cos^3(x)\mathrm{d}x$.

---

***Lösung.***

***(a)*** *Wir schreiben das uneigentliche Integral in der Form*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$$

*und substituieren* $y = \mathrm{e}^x$, *womit wir*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^{\mathrm{e}^b} \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty}\arctan(b) - \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

*bekommen.*

***(b)*** **1. Variante:** *Wir integrieren partiell und finden*

$$\int_0^1 \cos^3(x)\mathrm{d}x = \sin(1)\cos^2(1) + 2\int_0^1 \cos(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

*Setzen wir darin die für alle* $x \in \mathbb{R}$ *geltende Identität* $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ *ein, so erhalten wir die Beziehung*

$$3\int_0^1 \cos^3(x)\mathrm{d}x = \sin(1)\cos^2(1) + 2\int_0^1 \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(1)(\cos^2(1)+2),$$

*also*

$$\int_0^1 \cos^3(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(1)(\cos^2(1)+2).$$

**2. Variante:** *Verwenden wir die Identität*

$$\cos^3(x) = \tfrac{1}{8}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3 = \tfrac{1}{8}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) + \tfrac{3}{8}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \tfrac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x),$$

*so bekommen wir direkt*

$$\int_0^1 \cos^3(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \cos(3x)\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_0^1 \cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\sin(3) + \frac{3}{4}\sin(1).$$