Übungsblatt 1

Beispiel 1.

Bestimmen Sie das Innere, den Abschluß und den Rand der Mengen

(a) $A_1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < 2\}$ in $\mathbb{C}$,

(b) $A_2 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists r \in \mathbb{Z} : y = rx\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(c) $A_3 \coloneqq \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und

(d) $A_4 \coloneqq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ die Beziehung

$$\mathring{A} = \mathbb{C}^n \setminus \overline{A^{\mathrm{c}}}$$

gilt, wobei $A^{\mathrm{c}} = \mathbb{C}^n \setminus A$ das Komplement von A in $\mathbb{C}^n$ bezeichne.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktionen

(a) $f_1 \colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_1(x) \coloneqq \sqrt[n]{x}$,

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) \coloneqq \lfloor x \rfloor$,

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) \coloneqq \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$,

(d) $f_4 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) \coloneqq (x^2 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 3) g(|x|)^{-1}$, und

(e) $f_5 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x \, \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$,

stetig sind, wobei $g \colon]0, \infty[\to]0, \infty[$ eine beliebige stetige Funktion bezeichne und die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A \colon \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{1}_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

definiert sei.

Beispiel 4.

Sei

$$f \colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) \coloneqq \frac{p(z)}{q(z)},$$

eine rationale Funktion mit zwei Polynomfunktionen $p, q \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - a_i) \text{ und } q(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - b_j)$$

für Punkte $(a_i)_{i=1}^m$ und $(b_j)_{j=1}^n$ in $\mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{C}$, auf der f wohldefiniert und stetig ist.

(b) Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge $\hat{D} \supset D$ von $\mathbb{C}$, für die eine stetige Funktion $\hat{f} \colon \hat{D} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_D = f$ existiert.

Beispiel 5.
Seien $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, stetige Funktionen. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \max_{j \in \{1,\dots,n\}} f_j(x),$$

stetig ist.

Beispiel 6.
Bestimmen Sie, in welchen Punkten die Funktion

$$f \colon [0,\infty[^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y > x, \\ \frac{y}{x} & \text{für } x > y, \\ 1 & \text{für } x = y, \end{cases}$$

stetig ist.

Beispiel 7.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt konkav, falls

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \text{ für alle } \lambda \in [0,1] \text{ und alle } x, y \in]a,b[$$

gilt. Zeigen Sie, daß jede konkave Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ auf $]a,b[$ stetig ist.

Beispiel 8.
Eine Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, wenn für jeden Punkt $x \in]a,b[$ und jede gegen den Punkt x konvergierende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

gilt.
Zeigen Sie, daß eine Funktion $f \colon]a,b[$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn die Funktion

$$\hat{f} \colon]a,b[\to \mathbb{R},\ \hat{f}(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\},$$

mit f übereinstimmt.