Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 1

Beispiel 1.

Bestimmen Sie das Innere, den Abschluß und den Rand der Mengen

(a) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| < 2\}$ in $\mathbb{C}$,

(b) $A_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists r \in \mathbb{Z} : y = rx\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(c) $A_3 := \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und

(d) $A_4 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

Lösung.

Wir wollen vorausschicken, daß aus der Definition direkt folgt, daß für jede Menge A stets $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ gilt.

(a)

- *Sei z ein Punkt mit $1 < |z| < 2$. Setzen wir $\varepsilon := \min\{2 - |z|, |z| - 1\}$, so liegt wegen*

$$1 \le |z| - \varepsilon < |w| < |z| + \varepsilon \le 2$$

jeder Punkt $w \in \mathrm{B}_\varepsilon(z)$ auch in A_1. Ist jedoch $|z| = 1$, so finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $w \in \mathrm{B}_\varepsilon(z)$, welches nicht in A_1 liegt. Wir können beispielsweise $w = (1 - \frac{\varepsilon}{2})z$ im Fall $\varepsilon < 1$ und $w = 0$ im Fall $\varepsilon \ge 1$ wählen. Daher ist

$$\mathring{A}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}.$$

- *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A_1, die in $\mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion:*

$$|\lim_{n\to\infty} z_n| = \lim_{n\to\infty} |z_n| \in [1,2].$$

Also ist $\overline{A_1} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 2\}$.
Ist $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $|z| = 2$, so gilt für die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n := (1 - \frac{1}{n+1})z$, daß $1 \le \frac{1}{2}|z| \le |z_n| < |z| = 2$ ist, weshalb $z_n \in A_1$ liegt, und

$$|z - z_n| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty)$$

ist, weshalb $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert. Also ist $\overline{A_1} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 2\}$.

- *Für den Rand bekommen wir daraus*

$$\partial A = \overline{A_1} \setminus \mathring{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}.$$

(b)

- *Sei $\varepsilon > 0$ und $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ ein Kreis in $\mathbb{R}^2$ um einen Punkt $(x,y) \in A_2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist $y = rx$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Wir wählen nun $\delta \in]0,1[$ so klein, daß $|\delta\frac{x}{2}| < \varepsilon$ ist. Dann ist jedoch $(x, y + \delta\frac{x}{2})$ nicht in A_2, da sonst ein $\tilde{r} \in \mathbb{Z}$ mit $y + \delta\frac{x}{2} = \tilde{r}x$, also $\tilde{r} - r = \frac{\delta}{2} \in]0,1[$ existieren müßte. Daher ist $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ keine Teilmenge von A_2 und damit $(x,y) \notin \mathring{A}_2$.*
Es bleibt der Punkt $(0,0) \in A_2$. Dann gilt jedoch für jedes $\varepsilon > 0$, daß $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \notin A_2$ ist, weshalb auch $(0,0) \notin \mathring{A}_2$ ist. Also ist $\mathring{A}_2 = \emptyset$.

- *Ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_2$, so ist entweder $x = 0$ und $y \ne 0$ oder es gibt ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mit $y = rx$. Im zweiten Fall liegt der Punkt (x,y) zwischen den Geraden $\{\lambda(1, \lfloor r \rfloor) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{\lambda(1, \lfloor r \rfloor + 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bezeichnet $\varepsilon > 0$ den kleineren der beiden Abstände des Punkts zu den beiden Geraden, so ist $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \cap A_2 = \emptyset$, weshalb es keine Folge aus A_2 geben kann, die gegen (x,y) konvergiert. Somit ist in dem Fall $(x,y) \notin \overline{A_2}$.*
Betrachten wir einen Punkt $(0,y)$ mit $y \ne 0$, so können wir die Punkte $(x_n, y_n) := (\frac{y}{n+1}, y)$, $n \in \mathbb{N}$, betrachten. Dann ist $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $y_n = (n+1)x_n$ eine Folge in A_2 mit Grenzwert $(0,y)$. Damit haben wir also

$$\overline{A_2} = A_2 \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

gefunden.

- *Da das Innere leer ist, ergibt sich für den Rand $\partial A_2 = \overline{A_2}$.*

(c) *Da zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen eine irrationale Zahl liegt, haben wir in jedem offenen Intervall in $\mathbb{R}$ eine irrationale Zahl. Daher ist $\mathring{A}_3 = \emptyset$.*

Andererseits finden wir zu jeder irrationalen Zahl x eine rationale Folge $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \neq 0$, die gegen x konvergiert, zum Beispiel haben wir für $q_n = n+1$ und $p_n = \lfloor xq_n \rfloor$, daß

$$0 \leq x - \frac{p_n}{q_n} \leq x - \frac{x(n+1)-1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Somit ist $\overline{A_3} = \mathbb{R}$ und daher auch $\partial A_3 = \mathbb{R}$.

(d) *Da jeder Kreis in $\mathbb{C}$ um einen Punkt in $\mathbb{R}$ auch ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ enthält, und in jedem offenen Intervall eine rationale Zahl liegt, bekommen wir wie vorhin $\mathring{A}_4 = \emptyset$.*

Da zwischen beliebigen rationalen Zahlen eine irrationale Zahl liegt, können wir für eine beliebige rationale Zahl $q \in \mathbb{R}$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irrationaler Zahlen mit $x_n \in \,]q, q+\frac{1}{n+1}[$ finden, die damit gegen q konvergiert. Daher ist $\mathbb{R} \subset \overline{A_4}$.

Betrachten wir eine Zahl $x + \mathrm{i}y$ mit $y \neq 0$, so ist $\mathrm{B}_y(x+\mathrm{i}y) \cap A_4 = \emptyset$, weshalb wir keine gegen $x+\mathrm{i}y$ konvergierende Folge in A_4 finden können. Also ist $\overline{A_4} = \mathbb{R}$ und damit $\partial A_4 = \mathbb{R}$.

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ die Beziehung

$$\mathring{A} = \mathbb{C}^n \setminus \overline{A^c}$$

gilt, wobei $A^c = \mathbb{C}^n \setminus A$ das Komplement von A in $\mathbb{C}^n$ bezeichne.

Lösung.

‚$\subset$': *Sei $z \in \mathring{A}$. Dann existiert nach Definition ein Radius $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(z) \subset A$. Also gilt für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A^c, daß $|z_n - z| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, weshalb die Folge nicht gegen z konvergieren kann. Somit ist $z \notin \overline{A^c}$.*

‚$\supset$': *Wir beweisen die Kontraposition: Sei also $z \notin \mathring{A}$. Wir wählen eine beliebige Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Dann finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$, einen Wert $z_n \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(z) \cap A^c$. Damit gilt für die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A^c, daß*

$$0 \leq \|z_n - z\| < \varepsilon_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

ist, sie also gegen z konvergiert, womit $z \in \overline{A^c}$ gezeigt ist.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktionen

(a) $f_1\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sqrt[n]{x}$, für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \lfloor x \rfloor$,

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) := \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$,

(d) $f_4\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) := (x^2 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 3)g(|x|)^{-1}$, und

(e) $f_5\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) := x\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$,

stetig sind, wobei $g\colon]0,\infty[\to]0,\infty[$ eine beliebige stetige Funktion bezeichne und die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

definiert sei.

Lösung.

(a) *Seien $x \in [0,\infty[$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta := \varepsilon^n$. Dann gilt für alle $\tilde{x} \in]x-\delta, x+\delta[\cap [0,\infty[$, daß*

$$\tilde{x} < x + \varepsilon^n \leq (\sqrt[n]{x} + \varepsilon)^n \text{ und } x < \tilde{x} + \varepsilon^n \leq (\sqrt[n]{\tilde{x}} + \varepsilon)^n$$

ist. Also haben wir

$$\sqrt[n]{x} - \varepsilon < \sqrt[n]{\tilde{x}} < \sqrt[n]{x} + \varepsilon, \text{ und daher } |f_1(\tilde{x}) - f_1(x)| < \varepsilon,$$

was zeigt, daß f_1 in jedem Punkt $x \in [0,\infty[$ stetig ist.

(b) *Da f_2 für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $]n, n+1[$ konstant gleich n und damit stetig ist, jedoch*

$$f_2(n) = n \neq n - 1 = \lim_{k\to\infty} f(n - \tfrac{1}{k})$$

gilt, weshalb f_2 in $n \in \mathbb{N}$ nicht stetig ist, ist f_2 genau auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig.

(c) *Wie zuvor sehen wir, daß f_3 für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf den Intervallen $]-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}[$ und $]\sqrt{n}, \sqrt{n+1}[$ konstant gleich $\sqrt{n}$ und damit stetig ist, jedoch für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$f_3(-\sqrt{n}) = \sqrt{n} \neq \sqrt{n-1} = \lim_{k\to\infty} f_3(-\sqrt{n - \tfrac{1}{k}}) \text{ und } f_3(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \neq \sqrt{n-1} = \lim_{k\to\infty} f_3(\sqrt{n - \tfrac{1}{k}})$$

gilt, weshalb f_3 in $-\sqrt{n}$ und $\sqrt{n}$ nicht stetig ist.

Den Punkt 0 betrachten wir separat: Da f_3 konstant gleich null auf $]-1,1[$ ist, ist f_3 in 0 stetig.

Also ist f_3 genau auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ stetig.

(d) *Sei $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ebenfalls beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Dann gilt, da kein Nenner gegen null geht, die Betragsfunktion und die dritte Wurzel stetig in x und g stetig in $|x|$ ist, daß*

$$\lim_{k\to\infty} f_4(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k^2 + 2x_k^{-\frac{1}{3}} + 3}{g(|x_k|)} = \frac{(\lim_{k\to\infty} x_k)^2 + 2(\lim_{k\to\infty} x_k)^{-\frac{1}{3}} + 3}{g(|\lim_{k\to\infty} x_k|)} = f_5(x)$$

ist, weshalb f_4 auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist.

(e) *Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ irrationaler Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Daher haben wir*

$$f_5(x) = 0 \neq x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} f(x_k),$$

weshalb f_5 in keinem Punkt in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ stetig ist.

Ebenso finden wir jedoch auch für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine rationale Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} y_k = x$. Damit bekommen wir

$$f_5(x) = x \neq 0 = \lim_{k\to\infty} f(y_k),$$

so daß f_5 auch in keinem Punkt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Einzig in 0 finden wir, daß für jede Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$

$$|f_5(z_k)| \leq |z_k| \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und damit } \lim_{k\to\infty} f_5(z_k) = 0$$

gilt.

Beispiel 4.

Sei

$$f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{p(z)}{q(z)},$$

eine rationale Funktion mit zwei Polynomfunktionen $p, q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = \prod_{i=1}^{m}(z - a_i) \text{ und } q(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - b_j)$$

für Punkte $(a_i)_{i=1}^m$ und $(b_j)_{j=1}^n$ in $\mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{C}$, auf der f wohldefiniert und stetig ist.

(b) Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge $\hat{D} \supset D$ von $\mathbb{C}$, für die eine stetige Funktion $\hat{f}\colon \hat{D} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_D = f$ existiert.

Lösung.

(a) *Die Funktion f ist genau für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$ wohldefiniert. Da Polynomfunktionen stetig sind, ist f als Quotient zweier stetiger Funktionen auf $\{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{b_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ auch stetig.*

(b) *Sei $z = b_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Wir definieren $I_z := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid a_i = z\}$ und $J_z := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid b_j = z\}$ und setzen $I_z^c := \{1, \dots, m\} \setminus I_z$ und $J_z^c := \{1, \dots, n\} \setminus J_z$.*

Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen z konvergierende Folge. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, für das $\{a_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \cap \mathrm{B}_\varepsilon(z) \subset \{z\}$ und $\{b_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\} \cap \mathrm{B}_\varepsilon(z) = \{z\}$ ist. Dann finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in \mathrm{B}_\varepsilon(z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- *Ist $\operatorname{card}(I_z) > \operatorname{card}(J_z)$, so haben wir daher mit $\hat{f}(z) := 0$, daß*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z_n - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z_n - b_j)}(z_n - z)^{\operatorname{card}(I_z)-\operatorname{card}(J_z)} = 0$$

  gilt.

- *Ist $\operatorname{card}(I_z) = \operatorname{card}(J_z)$, so bekommen wir*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z_n - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z_n - b_j)} = \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z - b_j)} =: \hat{f}(z).$$

- *Für $\operatorname{card}(I_z) < \operatorname{card}(J_z)$ haben wir jedoch*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z_n - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z_n - b_j)} \frac{1}{(z_n - z)^{\operatorname{card}(J_z)-\operatorname{card}(I_z)}} = \infty.$$

Somit ist $\hat{D} = D \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus D \mid \operatorname{card}(I_z) \geq \operatorname{card}(J_z)\}$.

Beispiel 5.

Seien $f_1, \dots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, stetige Funktionen. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \max_{j\in\{1,\dots,n\}} f_j(x),$$

stetig ist.

Lösung.

- *Wir bemerken, daß für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Beziehung*

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

  gilt, da $|a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$ und $a + b = \max\{a, b\} + \min\{a, b\}$ ist.

- *Außerdem bemerken wir, daß für beliebige endliche Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ stets*

$$\max(A \cup B) = \max\{\max(A), \max(B)\}$$

  gilt, da für $z := \max\{\max(A), \max(B)\}$ offenbar für jedes $a \in A$ sowie für jedes $b \in B$ zwangsläufig $z \geq \max(A) \geq a$ und $z \geq \max(B) \geq b$ gilt und zudem $z \in \{\max(A), \max(B)\} \subset A \cup B$ ist.

- *Wir beweisen die Aussage nun nach Induktion in $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei also $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Funktionen $f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und*

  $$C := \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid g_n \textit{ ist stetig}\}, \textit{ wobei } g_n := \max_{j\in\{1,\dots,n\}} f_j(x)$$

  sei. Nach Voraussetzung ist $g_1 = f_1$ stetig, also $1 \in C$. Liegt $n \in C$, so folgt, daß die Kombination

  $$g_{n+1} = \max\{g_n, f_{n+1}\} = \frac{1}{2}(g_n + f_{n+1} + |g_n - f_{n+1}|)$$

  stetiger Funktionen wiederum stetig ist. Damit ist $n+1 \in C$ und nach vollständiger Induktion somit $C = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beispiel 6.
Bestimmen Sie, in welchen Punkten die Funktion

$$f \colon [0,\infty[^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y > x, \\ \frac{y}{x} & \text{für } x > y, \\ 1 & \text{für } x = y, \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung.

- *Sei $(x,y) \in [0,\infty[^2$ ein Punkt mit $y > x$. Dann gilt für $\varepsilon := \frac{1}{2}|y-x|$, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \subset \{(\tilde{x},\tilde{y}) \mid \tilde{y} > \tilde{x}\}$. Ist nun $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$, die gegen (x,y) konvergiert, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, für das $(x_n,y_n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ liegt für alle $n \geq N$. Darum ist*

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y},$$

  weshalb f im Punkt (x,y) stetig ist.

- *Analog gilt für jeden Punkt $(x,y) \in [0,\infty[^2$ mit $x > y$, daß ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $(x_n,y_n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \subset \{(\tilde{x},\tilde{y}) \mid \tilde{y} < \tilde{x}\}$ für alle $n \geq \tilde{N}$ existiert, wenn $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen (x,y) konvergierende Folge ist, und wir damit*

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}$$

  haben.

- *Sei $y = x > 0$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{2}|x|$, so daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \subset [\frac{1}{2}|x|,\infty[^2$ ist. Für eine gegen (x,y) konvergierende Folge $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden wir ein $\hat{N} \in \mathbb{N}$ so, daß $(x_n,y_n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \hat{N}$.*
  Dann gilt

  $$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\min\{x_n,y_n\}}{\max\{x_n,y_n\}} \leq f(x_n,y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\max\{x_n,y_n\}}{\min\{x_n,y_n\}} = 1,$$

  womit gezeigt ist, daß $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 1$ und damit f stetig in (x,y) ist.

- *Schließlich betrachten wir den Punkt $(0,0)$. Für die gegen $(0,0)$ konvergierende Folge $(0,\frac{1}{n})$ gilt*

  $$\lim_{n\to\infty} f(0,\tfrac{1}{n}) = 0 \neq 1 = f(0,0),$$

  weshalb f nicht stetig in $(0,0)$ ist.

Beispiel 7.
Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt konkav, falls

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \text{ für alle } \lambda \in [0,1] \text{ und alle } x,y \in]a,b[$$

gilt. Zeigen Sie, daß jede konkave Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ auf $]a,b[$ stetig ist.

Lösung.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert $x \in]a,b[$. Wir wählen einen beliebigen Wert $\varepsilon > 0$, für den $x-\varepsilon, x+\varepsilon \in]a,b[$ gilt. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

- *Wir schreiben dann x_n für $n \geq N$ als Linearkombination der Punkte x und $x + \sigma_n\varepsilon$, wobei wir das Vorzeichen $\sigma_n := \operatorname{sign}(x_n - x)$ einführen:*

  $$x_n = \lambda_n x + (1-\lambda_n)(x + \sigma_n\varepsilon),$$

  woraus sich der Ausdruck

  $$\lambda_n := \frac{x + \sigma_n\varepsilon - x_n}{\sigma_n\varepsilon} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}|x_n - x| \in [0,1]$$

  für λ_n ergibt. Insbesondere haben wir $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$.

  Damit folgt aus der Konkavität der Funktion f, die untere Schranke

  $$f(x_n) \geq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(x + \sigma_n\varepsilon) =: z_n \text{ für alle } n \geq N$$

  an die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

- *Schreiben wir für $n \geq N$ andererseits x als Linearkombination von x_n und $x - \sigma_n\varepsilon$, so bekommen wir*

  $$x = \mu_n x_n + (1-\mu_n)(x - \sigma_n\varepsilon)$$

  mit

  $$\mu_n := \frac{\sigma_n\varepsilon}{x_n - x + \sigma_n\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|x_n - x| + \varepsilon} \in [\tfrac{1}{2}, 1].$$

  Wiederum sehen wir, daß $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 1$ ist.

  Aus der Konkavität folgt daraus

  $$f(x) \geq \mu_n f(x_n) + (1-\mu_n) f(x - \sigma_n\varepsilon),$$

  also die untere Schranke

  $$f(x_n) \leq \frac{1}{\mu_n} f(x) + \left(1 - \frac{1}{\mu_n}\right) f(x - \sigma_n\varepsilon) =: y_n \text{ für alle } n \geq N.$$

Somit haben wir

$$y_n \leq f(x_n) \leq z_n \text{ für alle } n \geq N$$

und

$$\lim_{n\to\infty} y_n = f(x) = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

woraus folgt, daß die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Damit ist gezeigt, daß f in jedem beliebigen Punkt $x \in]a,b[$ stetig ist.

Beispiel 8.

Eine Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, wenn für jeden Punkt $x \in]a,b[$ und jede gegen den Punkt x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

gilt.

Zeigen Sie, daß eine Funktion $f\colon]a,b[$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn die Funktion

$$\hat{f}\colon]a,b[\to \mathbb{R},\ \hat{f}(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\},$$

mit f übereinstimmt.

Lösung.

‚⇐': Angenommen f wäre nicht unterhalbstetig. Dann finden wir einen Punkt $x \in]a,b[$ und eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \textit{ und } \liminf_{k\to\infty} f(x_k) < f(x)$$

gilt. Insbesondere existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(x_k) < f(x) - \varepsilon$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Da x der Grenzwert der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit $|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n+1}$ und $f(x_{k_n}) < f(x) - \varepsilon$. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\} \le f(x_{k_n}) \le f(x) - \varepsilon$$

und daher $\hat{f}(x) \le f(x) - \varepsilon$.

‚⇒': Gilt umgekehrt $\hat{f} \neq f$, so finden wir, da nach Definition $\hat{f} \le f$ gilt, einen Punkt $x \in]a,b[$ mit $\hat{f}(x) < f(x)$. Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|y_n - x| < \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} f(y_n) &< \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\} + \frac{1}{n+1} \\ &\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{m+1}}(x)\} + \frac{1}{n+1} = \hat{f}(x) + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x, \textit{ aber } \liminf_{n\to\infty} f(y_n) \le \hat{f}(x) < f(x),$$

weshalb f nicht unterhalbstetig ist.