Übungsblatt 2

Beispiel 1.

(a) Zeigen Sie, daß die Summe zweier gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, daß das Produkt zweier gleichmäßig stetiger und beschränkter Funktionen gleichmäßig stetig ist. Finden Sie ein Gegenbeispiel, falls eine der beiden Funktionen nicht beschränkt ist.

(c) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktionen. Zeigen Sie, daß $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 2.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$, mit reellen Koeffizienten $(a_k)_{k=0}^{n}$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

Lipschitz-stetig und ob sie gleichmäßig stetig sind.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, für welche Parameter $a \in [0, \infty[$ und $p \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ (oder allgemeiner $p \in \mathbb{Q}$) die Funktion

$$f\colon]a, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x^p,$$

Lipschitz-stetig und für welche sie gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 4.

(a) Finden Sie eine Funktion $f\colon]0, 1] \to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Finden Sie eine Funktion $g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 5.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie, daß reelle Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a|x| + b \le f(x) \le c|x| + d \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

existieren.

Beispiel 6.

Wir nennen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Hölder-stetig zu einem rationalen[1] Exponenten $\alpha \in]0, 1]$, falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^{\alpha}$$

existiert. Zeigen Sie, daß jede Hölder-stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu einem rationalen Exponenten $\alpha \in]0, 1]$ gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 7.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |(x-1)^2 - 2|.$$

[1] Die gleiche Definition samt folgender Aussage gilt genauso für irrationale Exponenten. Wir formulieren es jedoch nur für rationale Exponenten, da das Potenzieren mit irrationalen Exponenten bisher noch nicht eingeführt wurde.

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß f in $[a, b]$ ein globales Minimum besitzt.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unterhalbstetigen Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, die kein globales Maximum besitzt.