Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 2

Beispiel 1.

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f_1, f_2\colon A \to \mathbb{R}$, $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, daß die Summe $f_1 + f_2\colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, daß das Produkt $f_1 f_2\colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, wenn f_1 und f_2 beschränkt sind. Finden Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, daß nur eine der beiden Funktionen beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, daß $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

(a) *Seien $f_1, f_2\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$, sodass $|f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta_1$. Genauso gibt es ein $\delta_2 > 0$, für welches $|f_2(x) - f_2(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta_2$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung gilt damit für die Summe*

$$|(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(y)| \leq |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| < 2\varepsilon$$

für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

(b) *Sind f_1 und f_2 zusätzlich beschränkt, so erhalten wir, wieder unter Verwendung der Dreiecksungleichung, die folgende Abschätzung für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$*

$$\begin{aligned}
|(f_1 f_2)(x) - (f_1 f_2)(y)| &= |(f_1 f_2)(x) - f_1(x) f_2(y) + f_1(x) f_2(y) - (f_1 f_2)(y)| \\
&\leq |(f_1 f_2)(x) - f_1(x) f_2(y)| + |f_1(x) f_2(y) - (f_1 f_2)(y)| \\
&= |f_1(x)||f_2(x) - f_2(y)| + |f_2(y)||f_1(x) - f_1(y)| \\
&\leq M_1 \varepsilon + M_2 \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei M_i eine obere Schranke für $|f_i|$ ist.

Als Gegenbeispiel betrachte man $A := \mathbb{R}$, $f_1(x) := x$, sowie die stückweise lineare „Zick-Zack-Funktion"

$$f_2(x) := |x - k|, \quad x \in [k-1, k+1[, \quad k \in 2\mathbb{Z}.$$

Dann gilt für das Produkt

$$(f_1 f_2)(k) = \begin{cases} 0, & k \in 2\mathbb{Z}, \\ k, & k \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

Wählen wir nun beispielsweise $\varepsilon = 1$, so müssen wir zeigen, dass wir für jedes $\delta > 0$ zwei Punkte x, y finden mit $|x - y| < \delta$, aber $|f_1 f_2(x) - f_1 f_2(y)| > 1$. Setzt man $x = k \in 2\mathbb{N}$ und $y = x + \min\{\delta/2, 1\}$, so gilt

$$|f_1 f_2(x) - f_1 f_2(y)| = f_1 f_2(y) = (k + \min\{\delta/2, 1\}) \min\{\delta/2, 1\} \to \infty \quad \text{für } k \to \infty.$$

(c) *Sei $\varepsilon > 0$. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sodass $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ für alle x, y mit $|x - y| < \delta$. Da f ebenfalls gleichmäßig stetig ist, können wir aber auch ein $\gamma = \gamma(\delta(\varepsilon)) > 0$ finden, sodass $|f(u) - f(v)| < \delta$ für alle u, v mit $|u - v| < \gamma$. Insgesamt gilt also für alle solchen u, v, dass $|g(f(u)) - g(f(v))| < \varepsilon$.*

Beispiel 2.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$, mit reellen Koeffizienten $(a_k)_{k=0}^{n}$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

Lipschitz-stetig und ob sie gleichmäßig stetig sind.

Lösung.

(a) *Im Fall $f_1(x) = a_1x + a_0$ gilt $|f_1(x) - f_1(y)| = |a_1||x-y|$. Also ist f_1 Lipschitz-stetig. Aus Beispiel 6 (mit $\alpha = 1$) folgt, dass jede Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist.*

Polynome vom Grad $n \geq 2$ sind nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ und somit auch nicht Lipschitz-stetig.

1. Variante: *Wir zeigen dies, indem wir für jedes $\delta > 0$ ein x finden, sodass $|f_1(x) - f_1(x+\delta)|$ beliebig groß wird. Für $x > 0$ liefert die umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$|f_1(x+\delta) - f_1(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k((x+\delta)^k - x^k)\right|$$
$$\geq |a_n|((x+\delta)^n - x^n) - \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|((x+\delta)^k - x^k).$$

Ist $a_n \neq 0$, so ist diese untere Schranke ein Polynom vom Grad $n-1 \geq 1$ in x, wobei der Koeffizient der höchsten Potenz positiv ist. Also gilt $|f_1(x+\delta) - f_1(x)| \to \infty$ für $x \to \infty$.

2. Variante: *Nehmen wir an, die Funktion f_2 wäre für ein $n \geq 2$ und $a_n \neq 0$ gleichmäßig stetig. Dann finden wir gemäß Beispiel 5 Parameter $a, b \in]0, +\infty[$ mit $|f_2(x)| \leq a|x| + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das führt uns jedoch zum Widerspruch*

$$1 \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{|f_2(x)|}{c|x| + b} = \lim_{x\to+\infty} |x|^{n-1} \frac{|a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}|}{c + \frac{b}{|x|}} = +\infty.$$

(b) *Die Funktion f_2 ist sowohl Lipschitz- als auch gleichmäßig stetig aufgrund der folgenden direkten Abschätzung*

$$|f_2(x) - f_2(y)| = \frac{|\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}|}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{x^2+1}} \leq |\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}|$$
$$= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{|x-y||x+y|}{\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x^2+1}} \leq |x-y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, für welche Parameter $a \in [0, \infty[$ und $p \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ (oder allgemeiner $p \in \mathbb{Q}$) die Funktion

$$f\colon]a, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x^p,$$

Lipschitz-stetig und für welche sie gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

- *Für $p = 0$ ist f konstant und damit offenbar für alle $a \in [0, \infty[$ Lipschitz-stetig (und daher nach Beispiel 6 automatisch auch gleichmäßig stetig).*
- *Ist $p = 1$, so ist f ebenfalls Lipschitz-stetig für alle $a \in [0, \infty[$, da $|f(x) - f(y)| = |x-y|$ ist.*
- *Der Fall $p < 0$ ist repräsentiert durch $p = -1$.*
  - *Ist $a > 0$, so gilt für $p = -1$:*

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq \frac{|x-y|}{a^2},$$

woraus Lipschitz-Stetigkeit folgt.

Für allgemeines $p < 0$, schreiben wir für $y > x$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = \frac{1}{x^{|p|+1}} \frac{|1 - (\frac{y}{x})^p|}{|\frac{y}{x} - 1|}.$$

Wir betrachten daher die Funktion

$$g\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ g(z) := \frac{z^p-1}{z-1}.$$

Diese Funktion g ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.
Wegen der geometrischen Summenformel $w^m - 1 = (w-1)\sum_{k=0}^{m-1} w^k$ haben wir außerdem für alle $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$z^{\frac{m}{n}} - 1 = (z^{\frac{1}{n}} - 1)\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}} \text{ und } (z^{\frac{1}{n}} - 1)\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}} = z - 1,$$

so daß wir

$$\frac{z^{\frac{m}{n}}-1}{z-1} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}}}$$

schreiben können.
Daher gilt für $p = -\frac{m}{n}$

$$\lim_{z\to 1} g(z) = -\lim_{z\to 1} z^p \frac{z^{|p|}-1}{z-1} = -\lim_{z\to 1} z^{-\frac{m}{n}} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}}} = -\frac{m}{n} = p.$$

Wir können daher g mit $g(1) := p$ stetig auf $[1,+\infty[$ fortsetzen. Da wir wegen $\lim_{z\to+\infty} g(z) = 0$ ein $C > 0$ mit $|g(z)| < 1$ für alle $z > C$ finden können und $|g|$ auf $[1, C]$ ein Maximum besitzt, zeigt das, daß g beschränkt ist.
Somit ist aber für alle $y > x$ (und aus Symmetriegründen daher auch für alle $y < x$)

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le \frac{1}{a^{|p|+1}} \sup_{z\in]1,+\infty[} |g(z)|,$$

was die Lipschitz-Stetigkeit von f beweist.

- *Um zu zeigen, dass f im Fall $p = -1$ und $a = 0$ jedoch nicht einmal gleichmäßig stetig ist, betrachten wir zwei Punkte $x = 1/k$ und $y = 1/(k+1)$ für $k \in \mathbb{N}$. Für wachsendes k liegen x und y beliebig nahe beieinander. Andererseits gilt für die entsprechenden Funktionswerte $|f(x) - f(y)| = 1$.*
  Für allgemeines $p < 0$ und $a = 0$ können wir wie in Beispiel 5 argumentieren, um zu sehen, daß Parameter $b, c > 0$ mit $|f(x)| \le bx + c$ existieren müßten, wenn f gleichmäßig stetig wäre. Das ist jedoch nicht möglich, da wir sonst den Widerspruch

  $$1 \ge \lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{bx+c} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{|p|}(bx+c)} = +\infty$$

  hätten.

- *Betrachten wir nun den Fall $p \in]0,1[$, repräsentiert durch $p = 1/2$.*
  - *Für $a > 0$ haben wir für $p = \frac{1}{2}$, daß f wegen*

    $$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{|x-y|}{2\sqrt{a}}$$

    Lipschitz-stetig ist.
    Für allgemeines $p \in]0,1[$ schreiben wir für $x < y$

    $$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{1}{x^{1-p}} \frac{|(\frac{y}{x})^p - 1|}{|\frac{y}{x} - 1|} = \frac{1}{x^{1-p}} |g(\tfrac{y}{x})|.$$

    Wie zuvor haben wir für $p = \frac{m}{n}$

    $$\lim_{z\to 1} g(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}}} = p \text{ und } \lim_{z\to+\infty} g(z) = 0,$$

so daß g auch in diesem Fall eine beschränkte Funktion ist. Somit gilt wieder für alle $x \neq y$:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq \frac{1}{a^{1-p}} \sup_{z\in]1,+\infty[} |g(z)|,$$

was die Lipschitz-Stetigkeit und damit insbesondere die gleichmäßige Stetigkeit beweist.

– *Für $a = 0$ erhalten wir aus dem Lösungsvorschlag von Beispiel 3.(a) von Übungsblatt 1 die gleichmäßige Stetigkeit der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $]0,\infty[$. Allerdings erhalten wir für die Punkte $x = \frac{1}{2}\delta$ und $y = \delta$ den für $\delta \to 0$ unbeschränkten Ausdruck*

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\delta}},$$

weshalb die Funktion nicht Lipschitz-stetig ist.
Daß f für allgemeines $p \in]0,1[$ nicht Lipschitz-stetig ist, sehen wir mit $x = \frac{\delta}{2}$ und $y = \delta$ ebenso direkt aus

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{1}{x^{1-p}}|g(\tfrac{y}{x})| = \frac{2^{1-p}}{\delta^{1-p}}(2^p-1) \to +\infty \ (\delta \to 0).$$

Um die gleichmäßige Stetigkeit zu zeigen, schreiben wir wiederum für $0 < x < y$

$$|f(x)-f(y)| = \frac{|x-y|}{y^{1-p}}|g(\tfrac{x}{y})| \leq \frac{|x-y|}{y^{1-p}} \sup_{z\in]0,1[} |g(z)|,$$

wobei die auf $]0,1[$ definierte Funktion $g\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $g(z) := \frac{z^p-1}{z-1}$, wegen $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ und $\lim_{z\to 1} g(z) = p$ ebenfalls beschränkt ist.
Mit $|y-x| = y-x < y$ folgt daher

$$|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^p \sup_{z\in]0,1[} |g(z)|,$$

weshalb f Hölder-stetig mit Exponent p und daher nach Beispiel 6 insbesondere gleichmäßig stetig ist.

- *Daß f im Fall $p > 1$ (insbesondere für $p = 2$) für kein $a \in [0,\infty[$ gleichmäßig stetig ist, folgt wie zuvor daraus, daß keine Parameter $b, c > 0$ mit $|f(x)| \leq bx + c$ existieren können, da sonst*

$$1 \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{bx+c} = +\infty$$

gälte.

Beispiel 4.

(a) Finden Sie eine Funktion $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Finden Sie eine Funktion $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

Sei $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Zick-Zack-Funktion aus Beispiel 1, Punkt (b).

(a) *Wir definieren $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ als $f(x) := z(1/x)$ und zeigen, dass wir für jedes $\delta \in]0,1[$ zwei Werte x, y mit $|x-y| < \delta$ finden sodass $|f(x)-f(y)| = 1$. Setzen wir beispielsweise $x = 1/k$ und $y = 1/(k+1)$ für $k \in 2\mathbb{N}$, so ist klar, dass wir $|x-y|$ beliebig klein machen können. Andererseits gilt*

$$|f(x)-f(y)| = z(k+1) = 1.$$

(b) *Diesmal definieren wir* $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *über* $g(x) := z(x^2)$. *Wir argumentieren wie in Punkt (a). Setzt man* $x = \sqrt{k}$ *und* $y = \sqrt{k+1}$ *für* $k \in 2\mathbb{N}$, *so konvergiert der Abstand*

$$|x-y| = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

für steigendes k *gegen 0. Andererseits ist*

$$|g(x) - g(y)| = z(k+1) = 1.$$

Beispiel 5.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie, daß reelle Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a|x| + b \leq f(x) \leq c|x| + d \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

existieren.

Lösung.

Da f *gleichmäßig stetig ist, finden wir ein* $\delta > 0$, *für das* $|f(x) - f(y)| \leq 1$ *ist für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $|x-y| \leq \delta$. *Damit gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &\leq |f(x) - f(\operatorname{sign}(x)\delta\lfloor \tfrac{1}{\delta}|x|\rfloor)| + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{\delta}|x|\rfloor - 1} |f(\operatorname{sign}(x)(k+1)\delta) - f(\operatorname{sign}(x)k\delta)| \\ &\leq \lfloor \tfrac{1}{\delta}|x|\rfloor + 1 \leq \frac{1}{\delta}|x| + 1. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$-|f(0)| - 1 - \frac{1}{\delta}|x| \leq -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \leq |f(0)| + 1 + \frac{1}{\delta}|x|.$$

Beispiel 6.

Wir nennen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Hölder-stetig zu einem rationalen[1] Exponenten $\alpha \in]0,1]$, falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

existiert. Zeigen Sie, daß jede Hölder-stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu einem rationalen Exponenten $\alpha \in]0,1]$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

Sei $\varepsilon > 0$. *Dann gilt für* $\delta := (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}$:

$$|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \leq C\delta^\alpha = \varepsilon \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 7.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) := |(x-1)^2 - 2|.$$

Lösung.

Die Funktion f *hat kein globales Maximum, da* $f(x) \to \infty$ *für* $|x| \to \infty$. *Andererseits sind wegen* $f \geq 0$ *die Nullstellen* $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ *globale Minima von* f.

[1] Die gleiche Definition samt folgender Aussage gilt genauso für irrationale Exponenten. Wir formulieren es jedoch nur für rationale Exponenten, da das Potenzieren mit irrationalen Exponenten bisher noch nicht eingeführt wurde.

Um die lokalen Extrema zu bestimmen, betrachten wir das quadratische Polynom $\tilde{f}(x) = (x-1)^2 - 2$. Es gilt $f = -\tilde{f}$ auf dem Intervall $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ und $f = \tilde{f}$ auf dessen Komplement. Da $\tilde{f}$ auf $]-\infty, 1[$ streng monoton fallend und auf $]1, +\infty[$ streng monoton wachsend ist, besitzt das quadratische Polynom $\tilde{f}$ genau ein Extremum, nämlich das Minimum in $x = 1$, wo f daher ein lokales Maximum besitzt. Und außerhalb der drei gefundenen Extrema ist f streng monoton, weshalb es dort keine lokalen Extrema haben kann.

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß f in $[a,b]$ ein globales Minimum besitzt.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unterhalbstetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die kein globales Maximum besitzt.

Lösung.

(a) *Ist f nach unten nicht beschränkt, so finden wir für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ einen Wert $x_k \in [a,b]$ mit $f(x_k) \leq -k$, so daß die Folge $(f(x_k))_{k=1}^{\infty}$ uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert. Und ist f nach unten beschränkt, so wählen wir die Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ in $[a,b]$ derart, daß*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x_k) \leq \inf_{x\in[a,b]} f(x) + \frac{1}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

gilt und daher $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ ist.

Da $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $[a,b]$ ist, ist sie beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$. Für $\bar{x} := \lim_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}$ gilt dann wegen der Unterhalbstetigkeit von f:

$$f(\bar{x}) \leq \lim_{\ell\to\infty} f(x_{k_\ell}) = \lim_{k\to\infty} f(x_k).$$

Insbesondere kann daher $(f(x_k))_{k=1}^{\infty}$ nicht uneigentlich nach $-\infty$ konvergieren, weshalb die Funktion f nach unten beschränkt sein muß. Damit haben wir also

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(\bar{x}) \leq \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

weshalb $f(\bar{x}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ ist und f somit an der Stelle $\bar{x}$ das globale Minimum hat.

(b) *Die Funktion*

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

ist stetig auf $[0,1[$ mit einem Minimum bei $x = 1$. Daher ist f unterhalbstetig auf $[0,1]$. Allerdings hat f kein Maximum, da für jedes $x \in [0,1[$ die Ungleichung $f((x+1)/2) > f(x)$ gilt.