Übungsblatt 3

Beispiel 1.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, überall positive Funktion mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Zeigen Sie, daß f ein globales Maximum hat.

Beispiel 2.

Es bezeichne $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z(x) := |x - 2\lfloor \frac{1}{2}(x+1) \rfloor|$, die in den Lösungen von Übungsblatt 2 verwendete Zick-Zack-Funktion. Bestimmen Sie, ob die Gleichungen

(a) $x^{1001} + \frac{1}{1+x^2+z(x)} = 42$ und

(b) $z(x) = x - 1$

Lösungen $x \in \mathbb{R}$ besitzen.

Beispiel 3.

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes: Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei entweder $g(a) = a$ und $g(b) = b$ oder $g(a) = b$ und $g(b) = a$ gelte. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = g(x)$.

Beispiel 4.

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen auf $\mathbb{R}$. Welche der Funktionen $f+g$, fg und $g \circ f$ sind monoton wachsend?

Beispiel 5.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, daß eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist.

Beispiel 6.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{ax+b}{cx+d}.$$

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{R}$, auf der f wohldefiniert ist, sowie das Bild $f(\mathbb{R})$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse $f^{-1}\colon f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Beispiel 7.

Bestimmen Sie, auf welcher Teilmenge des Definitionsgebiets die Funktionenfolge

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$,

(b) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $g_n(x) := \frac{nx}{nx+1}$, beziehungsweise

(c) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $h_n(x) := \frac{1}{n}(1 - (x - a_n)^2)$,

punktweise konvergiert und ob sie auf dieser Menge auch gleichmäßig konvergiert. Dabei bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $[0,1]$.

Beispiel 8.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

stetig ist.