Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 3

Beispiel 1.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, überall positive Funktion mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Zeigen Sie, daß f ein globales Maximum hat.

Lösung.

Da f stetig ist, hat f ein Maximum auf jedem Intervall $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Hätte f nun kein globales Maximum auf $\mathbb{R}$, so müsste für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ existieren mit $|x_n| > n$ und

$$f(x_n) > \max_{-n \le x \le n} f(x) \ge f(0) > 0.$$

Mit anderen Worten hätten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|x_n| \to \infty$, für welche $f(x_n)$ aber nicht gegen 0 konvergiert, was im Widerspruch zur Annahme steht. Somit muss f ein globales Maximum auf $\mathbb{R}$ haben.

Beispiel 2.

Es bezeichne $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z(x) := |x - 2\lfloor \frac{1}{2}(x+1)\rfloor|$, die in den Lösungen von Übungsblatt 2 verwendete Zick-Zack-Funktion. Bestimmen Sie, ob die Gleichungen

(a) $x^{1001} + \frac{1}{1+x^2+z(x)} = 42$ und

(b) $z(x) = x - 1$

Lösungen $x \in \mathbb{R}$ besitzen.

Lösung.

(a) *Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{1001} + \frac{1}{1+x^2+z(x)}$. Sie ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Es gilt $f(0) = 1 < 42$ und $f(2) > 2^{1001} > 42$. Somit muss laut Zwischenwertsatz ein $x \in\,]0, 2[$ existieren mit $f(x) = 42$.*

(b) *Wie oben definieren wir die stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = z(x) - x$. Wegen $g(1) = 0$ und $g(2) = -2$, existiert ein $x \in\,]0, 2[$ mit $g(x) = -1$.*

Beispiel 3.

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes: Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a, b] \to [a, b]$, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei entweder $g(a) = a$ und $g(b) = b$ oder $g(a) = b$ und $g(b) = a$ gelte. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = g(x)$.

Lösung.

Wir betrachten die Funktion

$$h\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x) - g(x).$$

Sei zunächst $g(a) = a$ und $g(b) = b$. Da $a \le f(x) \le b$ für alle $x \in [a, b]$ ist, gilt

$$h(a) = f(a) - a \ge 0 \quad \textit{und} \quad h(b) = f(b) - b \le 0.$$

Nun garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in [a, b]$ mit $h(x) = 0$, also $f(x) = g(x)$.

Ist andererseits $g(a) = b$ und $g(b) = a$, so folgern wir umgekehrt, dass

$$h(a) = f(a) - b \le 0 \quad \textit{und} \quad h(b) = f(b) - a \ge 0.$$

Wiederum liefert der Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in [a, b]$ mit $f(x) = g(x)$.

Beispiel 4.

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen auf $\mathbb{R}$. Welche der Funktionen $f + g$, fg und $g \circ f$ sind monoton wachsend?

Lösung.

Im Folgenden seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen mit $x < y$. Laut Annahme gilt, dass $f(x) \leq f(y)$ und $g(x) \leq g(y)$ ist.

Die Gültigkeit von $f(x)+g(x) \leq f(y)+g(y)$ folgt unmittelbar aus den beiden Ungleichungen für f und g. Also ist $f+g$ monoton wachsend.

Dass fg im Allgemeinen nicht monoton wachsend ist, kann mit einem Gegenbeispiel gezeigt werden, zum Beispiel $f(x) = x$ und $g(x) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setzen wir $u = f(x)$ und $v = f(y)$, dann gilt $u \leq v$ wegen der Monotonie von f und folglich $g(u) \leq g(v)$ wegen der Monotonie von g.

Beispiel 5.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, daß eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist.

Lösung.

‚$\Rightarrow$': Sei f injektiv. Angenommen $x, y \in I$ seien zwei Punkte mit den Eigenschaften $x < y$ und $f(x) < f(y)$.

(i) Dann gilt für jeden Punkt $z \in \,]y, +\infty[$, daß $f(z) > f(y)$ ist, da sonst entweder $f(z) = f(y)$ wäre oder wir nach dem Zwischenwertsatz für einen beliebigen Wert $a \in \,]\max\{f(x), f(z)\}, f(y)[$ Werte $\xi_1 \in \,]x, y[$ und $\xi_2 \in \,]y, z[$ mit $f(\xi_1) = a = f(\xi_2)$ hätten, was beides der Injektivität von f widerspräche.

(ii) Ebenso gilt für jedes $z \in \,]-\infty, x[\, \cap I$, daß $f(z) < f(x)$ gelten muß, da sonst wiederum entweder $f(z) = f(x)$ wäre oder wir nach dem Zwischenwertsatz für einen beliebigen Wert $a \in \,]f(x), \min\{f(y), f(z)\}[$ Werte $\xi_1 \in \,]z, x[$ und $\xi_2 \in \,]x, y[$ mit $f(\xi_1) = a = f(\xi_2)$ hätten, was beides der Injektivität von f widerspräche.

(iii) Analog folgt für jeden Punkt $z \in \,]x, y[$, daß $f(x) < f(z) < f(y)$ gelten muß, da falls $f(x) < f(z)$ ist, aus Punkt (i) (bezüglich dem Punktepaar x und z) direkt $f(y) > f(z)$ folgt, und falls $f(z) < f(y)$ ist, aus Punkt (ii) (bezüglich dem Punktepaar z und y) sofort $f(x) < f(z)$ folgt.

Gibt es daher zwei Punkte $x, y \in I$ mit $x < y$ und $f(x) < f(y)$, so folgt für beliebige zwei Punkte $v, w \in I$ mit $v < w$

- *im Fall $w < y$, daß wegen Punkt (ii) oder Punkt (iii) (bezüglich dem Punktepaar x und y) $f(w) < f(y)$ und daher wegen Punkt (ii) (bezüglich dem Punktepaar w und y) $f(v) < f(w) < f(y)$ gelten muß;*
- *im Fall $x < w$, daß wegen Punkt (i) oder (iii) (bezüglich dem Punktepaar x und y) $f(x) < f(w)$ und daher wegen Punkt (ii) oder Punkt (iii) (bezüglich dem Punktepaar x und w) $f(v) < f(w)$ gelten muß.*

Somit ist f streng monoton wachsend.

Gibt es keine Punkte $x, y \in I$ mit $x < y$ und $f(x) < f(y)$, so gilt (wegen der Injektivität) für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ stets $f(x) > f(y)$, womit die Funktion streng monoton fallend ist.

‚$\Leftarrow$': Ist f streng monoton, so gilt entweder $f(x) < f(y)$ oder $f(y) < f(x)$ für alle Punkte $x, y \in I$ mit $x < y$. Insbesondere ist daher $f(x) \neq f(y)$ für alle $x, y \in I$ mit $x \neq y$, womit die Funktion f injektiv ist.

Beispiel 6.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{ax+b}{cx+d}.$$

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{R}$, auf der f wohldefiniert ist, sowie das Bild $f(\mathbb{R})$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse $f^{-1}\colon f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) *Um die Menge D zu bestimmen, unterscheiden wir drei Fälle*

$$D = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } c = d = 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } c = 0,\ d \neq 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen also in weiterer Folge an, dass nicht sowohl c und d gleich 0 sind.

Um das Bild $f(\mathbb{R})$ zu bestimmen, untersuchen wir, für welche $y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) = y$ eine Lösung $x \in D$ hat. Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $a = \lambda c$ und $b = \lambda d$, so folgt $\lambda = y = f(x)$ für alle x. (Man beachte, dass die Existenz eines derartigen λ äquivalent ist zu $ad = bc$.) Andernfalls lässt sich $f(x) = y$ umschreiben zu

$$x(a - cy) = dy - b.$$

Ist $c = 0$, dann muss $a \neq 0$ gelten und wir können nach x auflösen. Ist $c \neq 0$, so lässt sich nach x auflösen, falls $y \neq \frac{a}{c}$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$f(\mathbb{R}) = \begin{cases} \lambda, & ad = bc, \\ \mathbb{R}, & ad \neq bc \text{ und } c = 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}, & ad \neq bc \text{ und } c \neq 0. \end{cases}$$

(b) *Um f auf Injektivität zu untersuchen, betrachten wir die Gleichung $f(x) = f(\tilde{x})$ und erhalten nach Umformung*

$$(ad - bc)x = (ad - bc)\tilde{x}.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, falls $ad - bc = 0$ oder $x = \tilde{x}$. Also ist f genau dann injektiv, wenn $ad - bc \neq 0$. In diesem Fall ist die Inverse gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \frac{dy - b}{a - cy}.$$

Beispiel 7.

Bestimmen Sie, auf welcher Teilmenge des Definitionsgebiets die Funktionenfolge

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) \coloneqq x^n$,

(b) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n \colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $g_n(x) \coloneqq \frac{nx}{nx+1}$, beziehungsweise

(c) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $h_n(x) \coloneqq \frac{1}{n}(1 - (x - a_n)^2)$,

punktweise konvergiert und ob sie auf dieser Menge auch gleichmäßig konvergiert. Dabei bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $[0,1]$.

Lösung.

(a) *Wir haben*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1, \\ +\infty & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

und für $x \leq -1$ konvergiert die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht einmal uneigentlich. Somit konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $]-1,1]$ gegen die Funktion $\mathbf{1}_{\{1\}}$. Da $\mathbf{1}_{\{1\}}$ eine unstetige Funktion ist, kann die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit auf $]-1,1]$ nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) *Für alle $x \in]0,1[$ haben wir*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x + \frac{1}{n}} = 1.$$

Also konvergiert die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf ganz $]0,1[$ gegen die konstante Funktion $1\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$.

Da sich die Funktion g_n stetig zur Funktion $\tilde{g}_n\colon [0,1[\to \mathbb{R}$, $\tilde{g}_n(x) := \frac{nx}{nx+1}$, fortsetzen läßt und wegen $\tilde{g}_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \text{ für alle } x \in [0,1[$$

gilt, $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also punktweise gegen die unstetige Funktion $\mathbf{1}_{]0,1[}\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ konvergiert, kann sie nicht gleichmäßig konvergieren. Das heißt, die Folge

$$\left(\sup_{x\in[0,1[} |\tilde{g}_n(x) - \mathbf{1}_{]0,1[}(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sup_{x\in]0,1[} |g_n(x) - 1|\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert nicht gegen null, weshalb $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen 1 konvergiert.

Wir können dies auch explizit verifizieren:

$$\sup_{x\in]0,1[} |g_n(x) - 1| \geq |g_n(\tfrac{1}{n}) - 1| = \frac{1}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(c) *Wir haben*

$$\max_{x\in[0,1]} h_n(x) = h_n(a_n) = \frac{1}{n} \text{ und } \min_{x\in[0,1]} h_n(x) = \frac{1}{n}(1 - \max\{a_n^2, (1-a_n)^2\}) \geq 0.$$

Also bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

weshalb die Folge auf $[0,1]$ gleichmäßig (und damit auch punktweise) gegen die Nullfunktion konvergiert.

Beispiel 8.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

stetig ist.

Lösung.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$f_N\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f_N(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.

1. Variante: *Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ ein beliebiger Punkt. Wir definieren nun $n_0 := \lfloor|\Re\mathrm{e}(z_0)|\rfloor + 1$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\Re\mathrm{e}(z)| \leq n_0$ und alle $n \in [n_0+1, +\infty[_{\mathbb{N}}$, daß*

$$|z^2 - n^2| = |z-n|\,|z+n| \geq |\Re\mathrm{e}(z-n)|\,|\Re\mathrm{e}(z+n)| \geq (n - |\Re\mathrm{e}(z)|)^2 \geq (n-n_0)^2$$

ist.

Bezeichnen wir nun mit $R := \min\{|z_0 - n| \mid n \in [-n_0, n_0]_{\mathbb{N}}\}$ den kleinsten Abstand von z_0 zu den Punkten in $[-n_0, n_0]_{\mathbb{N}}$ und betrachten die Menge

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \tfrac{1}{2}R,\ |\Re\mathrm{e}(z)| \leq n_0\},$$

so haben wir für alle $z \in A$ und alle $n \in [0, n_0]_{\mathbb{N}}$, daß

$$|z^2 - n^2| = |z - n|\,|z + n| \geq (|z_0 - n| - |z - z_0|)(|z_0 + n| - |z - z_0|) \geq \frac{R^2}{4}$$

ist.
Setzen wir daher

$$a_n := \begin{cases} \frac{2|z_0|+R}{(n-n_0)^2} & \text{für } n \in [n_0+1, +\infty[_{\mathbb{N}}, \\ \frac{4}{R^2}(2|z_0|+R) & \text{für } n \in [1, n_0]_{\mathbb{N}}, \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

so ist die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Majorante für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in A} \left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right|,$$

weshalb f_N auf A gleichmäßig gegen f konvergiert, womit insbesondere gezeigt ist, daß f stetig in z_0 und damit auf ganz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist.

2. Variante: *Betrachten wir die Differenz*

$$|f_N(z) - f(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq 2|z| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|z^2 - n^2|},$$

so können wir diese für beliebig gewähltes $R > 0$ gleichmäßig für alle $z \in \mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z}$ abschätzen, sobald $N > R$ ist. Dazu bemerken wir, daß

$$\begin{aligned} |z^2 - n^2| &\geq n^2 - |z|^2 \geq n^2 - R^2 \geq n^2 \left(1 - \frac{R^2}{(N+1)^2}\right) \\ &\geq n^2 \left(1 - \frac{R^2}{(R+1)^2}\right) = \frac{2R+1}{(R+1)^2} n^2 \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z} \text{ und } n \in [N+1, \infty[_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

gilt. Daher haben wir

$$\sup_{z \in \mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z}} |f_N(z) - f(z)| \leq 2R \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - R^2} \leq \frac{2R(R+1)^2}{2R+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to 0 \ (N \to \infty)$$

wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Somit konvergiert $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ auf jedem Ball $\mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z}$, $R > 0$, gleichmäßig gegen f, weshalb f in jedem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ stetig ist.