Übungsblatt 4

Beispiel 1.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \,]0,+\infty[$ eine stetige Funktion mit

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$

$$f(ny) = \big(f(y)\big)^n$$

gelten muß.

(b) Folgern Sie, daß wir damit für jedes $y \in \mathbb{R}$ und jedes $r \in \mathbb{Q}$

$$f(ry) = \big(f(y)\big)^r$$

haben.

(c) Schließen Sie dann, daß jede Lösung f die Form

$$f(x) = a^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

für ein $a \in \,]0,+\infty[$ hat.

Beispiel 2.

Wir betrachten die Sinusfunktion

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

und die Cosinusfunktion

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(a) Zeigen Sie, daß wir für alle $x \in [0,5]$ die Abschätzungen

$$x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin(x) \le x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \text{ und}$$
$$1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos(x) \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

haben.

(b) Folgern Sie, daß die Cosinusfunktion eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Wir definieren die Kreiszahl π dadurch, daß diese Nullstelle gerade $\frac{\pi}{2}$ sei.

Beispiel 3.

Schließen Sie aus Beispiel 2, daß

(a) $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(b) $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1$ und

(c) sin und cos periodische Funktionen mit der Periode 2π sind (was bedeutet, daß $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).

Beispiel 4.

Beweisen Sie, daß die Funktion

$$f\colon]-\pi,\pi] \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\},\ f(\varphi) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

für jedes $R > 0$ bijektiv ist.

Beispiel 5.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Differenzierbarkeit ist „stärker“ als Stetigkeit: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f in x auch stetig.

(b) Ableiten ist eine lineare Operation: Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Linearkombination $af + bg$ bei x differenzierbar und es gilt

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Beispiel 6.

Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{1}{x}$,

(c) $f_3\colon]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f_3(x) = \sqrt{x}$

durch direkte Auswertung des Grenzwerts

$$\lim_{y \to x} \frac{f_i(y) - f_i(x)}{y - x}.$$

Beispiel 7.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) := x^2 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$,

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind.

Beispiel 8.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, nur anhand der Definition der Ableitung, daß

(a) die Ableitung einer geraden Funktion ungerade, und

(b) die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist.