# Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 4

***Beispiel 1.***

Sei $f\colon \mathbb{R} \to ]0,+\infty[$ eine stetige Funktion mit

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

***(a)*** Zeigen Sie, daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$

$$f(ny) = \big(f(y)\big)^n$$

gelten muß.

***(b)*** Folgern Sie, daß wir damit für jedes $y \in \mathbb{R}$ und jedes $r \in \mathbb{Q}$

$$f(ry) = \big(f(y)\big)^r$$

haben.

***(c)*** Schließen Sie dann, daß jede Lösung $f$ die Form

$$f(x) = a^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

für ein $a \in ]0,+\infty[$ hat.

***Lösung.***

***(a)*** *Als erstes bemerken wir, daß wegen*

$$f(0) = f(0+0) = (f(0))^2$$

*$f(0) = 1$ ist.*

*Mit vollständiger Induktion bekommen wir, daß für beliebiges $y \in \mathbb{R}$*

$$f(ny) = \big(f(y)\big)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

*gilt: Die Induktionsverankerung ist durch $f(0) = 1$ gegeben und haben wir $f(ny) = (f(y))^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt direkt*

$$f((n+1)y) = f(ny+y) = f(ny)f(y) = \big(f(y)\big)^n f(y) = \big(f(y)\big)^{n+1}.$$

*Zudem folgt aus*

$$1 = f(0) = f(y-y) = f(y)f(-y),$$

*daß $f(-y) = (f(y))^{-1}$ ist. Gilt $f(-ny) = (f(y))^{-n}$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so folgt außerdem*

$$f(-(n+1)y) = f(-ny-y) = f(-ny)f(-y) = (f(y))^{-n}(f(y))^{-1} = (f(y))^{-n-1},$$

*was mit vollständiger Induktion die Behauptung liefert.*

***(b)*** *Aus*

$$f(y) = f(n\tfrac{y}{n}) = (f(\tfrac{y}{n}))^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ y \in \mathbb{R}$$

*ergibt sich weiters $f(\frac{y}{n}) = (f(y))^{\frac{1}{n}}$, womit wir für jedes $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$f(ry) = f(\tfrac{m}{n}y) = f(m\tfrac{y}{n}) = (f(\tfrac{y}{n}))^m = \big((f(y))^{\frac{1}{n}}\big)^m = (f(y))^r$$

*bekommen.*

***(c)*** *Mit* $a := f(1)$ *haben wir daher (für* $y = 1$*)*

$$f(r) = a^r \text{ für alle } r \in \mathbb{Q}.$$

*Da die Funktion* $x \mapsto a^x$ *stetig ist, bekommen wir damit für jedes* $x \in \mathbb{R}$*, indem wir eine Folge* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{Q}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ *betrachten, daß*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$$

*gilt.*

***Beispiel 2.***

Wir betrachten die Sinusfunktion

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

und die Cosinusfunktion

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

***(a)*** Zeigen Sie, daß wir für alle $x \in [0,5]$ die Abschätzungen

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \text{ und}$$
$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

haben.

***(b)*** Folgern Sie, daß die Cosinusfunktion eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Wir definieren die Kreiszahl $\pi$ dadurch, daß diese Nullstelle gerade $\frac{\pi}{2}$ sei.

***Lösung.***

***(a)*** *Wir betrachten für* $x \in [0,5]$ *die Reihen*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ und } \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

*Wegen*

$$\frac{\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} \leq \frac{25}{42} < 1 \text{ für alle } k \in [2,\infty]_{\mathbb{N}} \text{ und}$$
$$\frac{\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{x^{2k}}{(2k)!}} = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \leq \frac{25}{30} < 1 \text{ für alle } k \in [2,\infty]_{\mathbb{N}},$$

*sind beides alternierende Reihen, deren Summanden im Betrag monoton fallenden Nullfolgen sind. Daher liegen die Grenzwerte der Reihe zwischen* $0$ *und dem ersten Summanden:*

$$0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \frac{x^5}{5!} \text{ und } 0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{x^4}{4!},$$

*was uns die Behauptung liefert.*

***(b)*** *Wir haben* $\cos(0) = 1 > 0$ *und nach Teil (a)*

$$\cos(2) \leq 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{24} \cdot 2^4 = -\frac{1}{3} < 0,$$

*weshalb die stetige Cosinusfunktion eine Nullstelle im Intervall* $]0,2[$ *besitzen muß.*

*Betrachten wir nun die Menge* $N := \{x \in ]0,2[ \mid \cos(x) = 0\}$ *aller Nullstellen in diesem Intervall, so ist die Menge nicht leer, weshalb* $\inf N \in [0,2[$ *ist. Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $N$*, die gegen* $\inf N$ *konvergiert, so gilt wegen der Stetigkeit des Cosinus, daß* $\cos(\inf N) = \lim_{n\to\infty}\cos(x_n) = 0$ *und somit* $\inf N \in N$ *ist. Da das Infimum wegen* $\cos(0) = 1$ *nicht in* $0$ *liegen kann, ist damit* $\inf N$ *die kleinste positive Nullstelle vom Cosinus.*

***Beispiel 3.***

Schließen Sie aus Beispiel 2, daß

***(a)*** $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

***(b)*** $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ und

***(c)*** sin und cos periodische Funktionen mit der Periode $2\pi$ sind (was bedeutet, daß $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).

***Lösung.***

***(a)*** *Nach Definition der Sinus- und Cosinusfunktion haben wir*

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = |\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)|^2 = |\exp(\mathrm{i}x)|^2.$$

*Nach dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion und der aus der Reihendarstellung für alle* $z \in \mathbb{C}$ *folgenden Identität* $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ *gilt dann jedoch*

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = |\exp(\mathrm{i}x)|^2 = \overline{\exp(\mathrm{i}x)}\exp(\mathrm{i}x) = \exp(\mathrm{i}(x-x)) = \exp(0) = 1.$$

*Somit ist* $\sin(\frac{\pi}{2}) \in \{-1,1\}$ *und es genügt zu zeigen, daß* $\sin(\frac{\pi}{2}) > -1$ *ist, was sofort aus unserer Abschätzung in Beispiel 2, Teil (a), folgt:*

$$\sin(x) \geq x - \tfrac{1}{6}x^3 = x(1 - \tfrac{1}{\sqrt{6}}x)(1 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}x) \geq 0 \textit{ für alle } x \in ]0,\sqrt{6}[ \supset ]0,2[.$$

***(b)*** *Wir haben also an der Stelle* $\frac{\pi}{2}$*:*

$$\exp(\tfrac{\pi}{2}\mathrm{i}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{i}.$$

*Gemäß dem Additionstheorem gilt daher*

$$\exp(2\pi\mathrm{i}) = \big(\exp(\tfrac{\pi}{2}\mathrm{i})\big)^4 = \mathrm{i}^4 = 1.$$

***(c)*** *Daraus folgt weiters für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+2\pi) + \mathrm{i}\sin(x+2\pi) = \exp(\mathrm{i}(x+2\pi)) = \exp(\mathrm{i}x)\exp(2\pi\mathrm{i}) = \exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x),$$

*weshalb*

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \textit{ und } \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

*gilt.*

***Beispiel 4.***

Beweisen Sie, daß die Funktion

$$f\colon ]-\pi,\pi] \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\},\ f(\varphi) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

für jedes $R > 0$ bijektiv ist.

***Lösung.***

*Wir zeigen zuerst, daß die Funktion surjektiv ist. Sei dazu* $z = x + \mathrm{i}y$ *ein beliebiger Punkt mit* $|z|^2 = x^2 + y^2 = R^2$*. Da* cos *eine stetige Funktion mit* $\cos(0) = 1$ *und* $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ *ist, finden wir ein* $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

*mit* $\cos(\varphi) = \frac{1}{R}|x|$*. Wegen* $\cos^2(\xi) + \sin^2(\xi) = 1$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}$ *bekommen wir zusammen mit* $\sin(\xi) \geq 0$ *für alle* $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *damit auch* $\sin(\varphi) = \frac{1}{R}|y|$*. Um das Vorzeichen richtig zu bekommen, bemerken wir, daß*

$$\cos(-\xi) = \cos(\xi) \textit{ und } \sin(-\xi) = -\sin(\xi)$$

*sowie*

$$\cos(\xi - \pi) + \mathrm{i}\sin(\xi - \pi) = \exp(\mathrm{i}\xi)\exp(-\mathrm{i}\pi) = (-\mathrm{i})^2\exp(\mathrm{i}\xi) = -\cos(\xi) - \mathrm{i}\sin(\xi)$$

*gilt. Wir definieren daher*

$$\psi := \begin{cases} \varphi & \textit{für } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ \varphi - \pi & \textit{für } x < 0, y < 0, \\ -\varphi & \textit{für } x \geq 0, y < 0, \\ \pi - \varphi & \textit{für } x < 0, y \geq 0, \end{cases}$$

*was uns* $\cos(\psi) = x$ *und* $\sin(\psi) = y$ *liefert.*

*Um die Injektivität zu beweisen, seien* $\varphi, \phi \in\ ]-\pi, \pi]$ *mit* $f(\varphi) = f(\phi)$*. Dann ist*

$$1 = \exp(\mathrm{i}(\varphi - \phi)), \textit{ also } \mathrm{i} = \exp(\mathrm{i}(\varphi - \phi + \frac{\pi}{2})) = \cos(\varphi - \phi + \tfrac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\varphi - \phi + \tfrac{\pi}{2}).$$

*Somit ist* $\varphi - \phi + \frac{\pi}{2}$ *eine Nullstelle des Cosinus. Da aber* $\frac{\pi}{2}$ *die kleinste Nullstelle des Cosinus ist, also im Intervall* $[0, \frac{\pi}{2}[$ *keine Nullstelle existiert, liegt wegen* $\cos(\xi - \pi) = -\cos(\xi)$ *in* $[-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ *ebenfalls keine Nullstelle. Und wegen* $\cos(-\xi) = \cos(\xi)$ *sind daher* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{\pi}{2}$ *die einzigen Nullstellen in* $[-\pi, \pi]$*. Wegen der Periodizität mit Periode* $2\pi$ *muß daher ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit*

$$\varphi - \phi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \textit{ also } \varphi = \phi + \pi k$$

*existieren. Wegen* $\varphi, \phi \in\ ]-\pi, \pi]$ *kommt damit nur* $\varphi = \phi$ *oder* $|\varphi - \phi| = \pi$ *in Frage. Da an der Stelle* $\varphi - \phi + \frac{\pi}{2}$ *allerdings zudem der Sinus 1 sein muß, ist der zweite Fall wegen*

$$\sin(\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(-\pi + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

*ausgeschlossen, womit wir die Injektivität gezeigt haben.*

***Beispiel 5.***

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

***(a)*** Differenzierbarkeit ist „stärker“ als Stetigkeit: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $f$ in $x$ auch stetig.

***(b)*** Ableiten ist eine lineare Operation: Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Linearkombination $af + bg$ bei $x$ differenzierbar und es gilt

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

***Lösung.***

***(a)*** *Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Grenzwert* $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *existiert, berechnen wir direkt*

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to x} f(y) &= f(x) + \lim_{y\to x}(f(y) - f(x)) = f(x) + \lim_{y\to x}(y - x)\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\
&= f(x) + \lim_{y\to x}(y - x)\lim_{y\to x}\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f(x) + 0 \cdot f'(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

*(b) Die Rechenregeln für Grenzwerte liefern direkt, dass*

$$\begin{aligned} af'(x) + bg'(x) &= a \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + b \lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \to x} \left( a \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + b \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \right) \\ &= \lim_{y \to x} \frac{(af + bg)(y) - (af + bg)(x)}{y - x} \\ &= (af + bg)'(x). \end{aligned}$$

**Beispiel 6.**

Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

**(a)** $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

**(b)** $f_2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$,

**(c)** $f_3 \colon ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$

durch direkte Auswertung des Grenzwerts

$$\lim_{y \to x} \frac{f_i(y) - f_i(x)}{y - x}.$$

***Lösung.***

*(a) Definieren wir die Potenzfunktion $g_k(x) := x^k$, so wissen wir aus Beispiel 5.(b), dass $f_1'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k g_k'(x)$ gilt. Also berechnen wir gliedweise*

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j h^{k-j} - x^k \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j h^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \lim_{h \to 0} h^{k-j-1} = k x^{k-1}. \end{aligned}$$

*(b) Direktes Einsetzen liefert uns:*

$$f_2'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \frac{-h}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

*(c) Multiplikation des Differenzenquotienten mit $\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ liefert*

$$f_3'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Beispiel 7.**

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

**(a)** $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

**(b)** $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

**(c)** $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) := x^2 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind.

***Lösung.***

***(a)*** *Der Grenzwert*

$$f_1'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

*existiert nicht. Also ist $f_1$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar.*

***(b)*** *Wegen der Beschränktheit der Sinusfunktion gilt jedoch*

$$f_2'(0) = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

***(c)*** *Analog haben wir*

$$f_3'(0) = \lim_{h\to 0} h\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(h) = 0.$$

***Beispiel 8.***

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, nur anhand der Definition der Ableitung, daß

***(a)*** die Ableitung einer geraden Funktion ungerade, und

***(b)*** die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist.

***Lösung.***

***(a)*** *Da $f$ gerade ist, erhalten wir*

$$-f'(-x) = -\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}.$$

*Dieser Grenzwert ist unabhängig von der betrachteten Nullfolge. Da $h \to 0$ äquivalent zu $-h \to 0$ ist, können wir $-h$ durch $h$ ersetzen. Somit ergibt sich*

$$-f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

***(b)*** *Auf ähnliche Weise erhalten wir*

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x).$$