Übungsblatt 5

Beispiel 1.

Bestimmen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die Konvergenzradien der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} z^{2k+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} z^{2k+1}$,

wobei die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, durch die Rekursion

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha - k}{k+1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

mit dem Anfangswert $\binom{\alpha}{0} = 1$ definiert sind.

Beispiel 2.

Wir betrachten die rekursiv durch

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit den Anfangswerten $f_0 := 0$ und $f_1 := 1$ definierte Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um eine explizite Darstellung zu bekommen, siehe Beispiel 3.(b), definieren wir zunächst die Potenzreihe

$$F\colon \mathrm{B}_R(0) \to \mathbb{C},\ F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

wobei $R > 0$ so gewählt sei, daß die Reihe auf $\mathrm{B}_R(0)$ konvergiere.

(a) Verifizieren Sie, daß ein Radius $R > 0$ existiert, für den die Funktion F wohldefiniert ist.

(b) Folgern Sie aus der Rekursionsgleichung, daß die Funktion F durch

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_R(0)$$

gegeben ist.

Beispiel 3.

(a) Schreiben Sie die Funktion F aus Beispiel 2.(b) in der Form

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b}$$

mit geeigneten Konstanten $A, B, a, b \in \mathbb{C}$ und bestimmen Sie damit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und einen Radius $r > 0$, für die

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0)$$

gilt.

(b) Beweisen Sie, daß die in Beispiel 2 definierten Fibonacci-Zahlen durch

$$f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\Big((1+\sqrt{5})^n - (-1)^n(\sqrt{5}-1)^n\Big) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegeben sind.

Beispiel 4.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$f'(x) \leq af(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, daß

$f(x) \geq \mathrm{e}^{ax} f(0)$ für alle $x \in \,]-\infty, 0]$ und
$f(x) \leq \mathrm{e}^{ax} f(0)$ für alle $x \in [0, +\infty[$

gilt.

Beispiel 5.

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und n-mal differenzierbar auf $]a,b[$. Beweisen Sie, daß die n-te Ableitung $f^{(n)}\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Nullstelle besitzt, falls f selbst $n+1$ Nullstellen hat.

(b) Nutzen Sie Punkt (a) um die folgende Aussage zu beweisen:

Seien $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ in $[a,b]$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion und $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad höchstens N, welches $g(x_i) = p(x_i)$ für alle $i = 0, \ldots, N$ erfüllt. Dann gibt es für jedes $x \in [a,b]$ ein $\xi \in \,]a,b[$ mit

$$g(x) - p(x) = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x),$$

wobei $q(x) := \prod_{i=0}^{N}(x - x_i)$ sei.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$h(t) := q(x)(g(t) - p(t)) - q(t)(g(x) - p(x))$$

und zeigen Sie, daß sie $N+2$ Nullstellen hat.

Beispiel 6.

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\big(\tan(x)\big)^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) \tan(2x\tan(x))$.

Beispiel 7.

Wir betrachten die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Bestimmen Sie

(a) die Extrema,

(b) das Monotonieverhalten,

(c) die maximalen Intervalle, auf welchen f konvex oder konkav ist, sowie

(d) die Grenzwerte $\lim_{x\to -1} f'(x)$ und $\lim_{x\to 1} f'(x)$.

Skizzieren Sie den Graphen von f.

Beispiel 8.

(a) Berechnen Sie $\int \mathrm{e}^x \cos(x) \, \mathrm{d}x$.

(b) Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für die Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$I_n \coloneqq \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \, \mathrm{d}x.$$