Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 5

Beispiel 1.

Bestimmen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die Konvergenzradien der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} z^{2k+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} z^{2k+1}$,

wobei die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, durch die Rekursion

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha - k}{k+1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

mit dem Anfangswert $\binom{\alpha}{0} = 1$ definiert sind.

Lösung.

(a) *Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so ist $\binom{\alpha}{k} = 0$ für alle $k > \alpha$, weshalb wir eine endliche Summe und damit einen unendlichen Konvergenzradius haben.*

Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, so ist $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und wegen

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} z^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} z^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha - k|}{k+1} |z| = |z|$$

konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium für $z \in \mathrm{B}_1(0)$ absolut und divergiert für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathrm{B}}_1(0)$. Somit ist der Konvergenzradius gerade 1.

(b) *Mit*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{2k+1} z^{2k+1} \right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{\frac{1}{k}}}{(2k+1)^{\frac{1}{k}}} |z|^2 = |z|^2,$$

bekommen wir aus dem Wurzelkriterium, daß die Reihe für $z \in \mathrm{B}_1(0)$ absolut konvergiert und für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_1(0)$ divergiert. Der Konvergenzradius ist daher ebenfalls 1.

(c) *Aus*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2(2k+3)} z^{2k+3}}{\frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} z^{2k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)^2(2k+2)}{(k+1)^2(2k+3)} |z|^2 = 4|z|^2$$

folgt mit dem Quotientenkriterium, daß die Reihe für $4|z|^2 < 1$, also $z \in \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}(0)$, absolut konvergiert und für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_{\frac{1}{2}}(0)$ divergert, weshalb der Konvergenzradius gerade $\frac{1}{2}$ ist.

Beispiel 2.

Wir betrachten die rekursiv durch

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit den Anfangswerten $f_0 \coloneqq 0$ und $f_1 \coloneqq 1$ definierte Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um eine explizite Darstellung zu bekommen, siehe Beispiel 3.(b), definieren wir zunächst die Potenzreihe

$$F\colon \mathrm{B}_R(0) \to \mathbb{C},\ F(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

wobei $R > 0$ so gewählt sei, daß die Reihe auf $\mathrm{B}_R(0)$ konvergiere.

(a) Verifizieren Sie, daß ein Radius $R > 0$ existiert, für den die Funktion F wohldefiniert ist.

(b) Folgern Sie aus der Rekursionsgleichung, daß die Funktion F durch

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_R(0)$$

gegeben ist.

Lösung.

(a) *Wir behaupten, daß die Beziehung $f_n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und beweisen dies mittels vollständiger Induktion. Die Bedingung für $n = 0$ und $n = 1$ ist offenbar erfüllt. Gilt nun $f_k < C^k$ für alle $k \le n$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so folgt*

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \le 2^n + 2^{n-1} \le 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

weshalb $f_k < 2^k$ für alle $k \le n+1$ und nach vollständiger Induktion somit für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ wegen

$$|f_n z^n| \le 2^n z^n \le 2^{-n} \textit{ für alle } z \in \mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)$$

unter anderem auf $\mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)$ und ist somit für $R \coloneqq \frac{1}{4}$ wohldefiniert.

(b) *Gemäß der Rekursionsgleichung gilt für alle $z \in \mathrm{B}_R(0)$ die Beziehung*

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f_0 + f_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{n+2} = z + z \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \\ &= z + (z + z^2) F(z), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Beispiel 3.

(a) Schreiben Sie die Funktion F aus Beispiel 2.(b) in der Form

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$

mit geeigneten Konstanten $A, B, a, b \in \mathbb{C}$ und bestimmen Sie damit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und einen Radius $r > 0$, für die

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0)$$

gilt.

(b) Beweisen Sie, daß die in Beispiel 2 definierten Fibonacci-Zahlen durch

$$f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \Big((1+\sqrt{5})^n - (-1)^n(\sqrt{5}-1)^n \Big) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegeben sind.

Lösung.

(a) *Seien a und b die Nullstellen der Polynomfunktion $z \mapsto 1-z-z^2$, so daß wir $z^2+z-1 = (z-a)(z-b)$ haben. Wir schreiben dann*

$$\frac{z}{1-z-z^2} = -\frac{z}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{a}{z-a} - \frac{b}{z-b}\right)$$

und bekommen mit der Formel

$$\frac{c}{z-c} = -\frac{1}{1-\frac{z}{c}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{c}\right)^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_c(0)$$

für die geometrische Reihe, daß mit $r := \min\{|a|,|b|\}$

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n}\right) z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0)$$

gilt.

(b) *Bestimmen wir die Nullstellen a und b explizit, so finden wir, wenn wir uns willkürlich für $a < b$ entscheiden,*

$$a = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \text{ und } b = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Damit erhalten wir also $r = b$ und

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{(\sqrt{5}-1)^n} - \frac{2^n}{(-1-\sqrt{5})^n}\right) z^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^n} - (-1)^n\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^n}\right) z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0). \end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathrm{B}_{\min\{R,r\}}(0)$ gilt somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^n} - (-1)^n\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^n}\right) z^n,$$

woraus aus dem Identitätssatz die Behauptung folgt.

Beispiel 4.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) \le a f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} &f(x) \ge \mathrm{e}^{ax} f(0) \text{ für alle } x \in \left]-\infty, 0\right] \text{ und} \\ &f(x) \le \mathrm{e}^{ax} f(0) \text{ für alle } x \in \left[0, +\infty\right[\end{aligned}$$

gilt.

Lösung.

Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := f(x)\mathrm{e}^{-ax}.$$

Wegen der Differenzierbarkeit von g und der Exponentialfunktion ist g ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-ax} - a f(x)\mathrm{e}^{-ax} \le 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist g monoton fallend und es gilt daher für alle $x \in [0, +\infty[$

$$f(x)\mathrm{e}^{-ax} = g(x) \le g(0) = f(0), \text{ also } f(x) \le f(0)\mathrm{e}^{-ax}.$$

Ebenso folgt für alle $x \in]-\infty, 0]$, daß

$$f(x)\mathrm{e}^{-ax} = g(x) \ge g(0) = f(0), \text{ also } f(x) \ge f(0)\mathrm{e}^{-ax}$$

ist.

Beispiel 5.

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und n-mal differenzierbar auf $]a,b[$. Beweisen Sie, daß die n-te Ableitung $f^{(n)}\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Nullstelle besitzt, falls f selbst $n+1$ Nullstellen hat.

(b) Nutzen Sie Punkt (a) um die folgende Aussage zu beweisen:

Seien $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ in $[a,b]$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion und $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad höchstens N, welches $g(x_i) = p(x_i)$ für alle $i = 0, \ldots, N$ erfüllt. Dann gibt es für jedes $x \in [a,b]$ ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$g(x) - p(x) = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x),$$

wobei $q(x) := \prod_{i=0}^{N}(x - x_i)$ sei.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$h(t) := q(x)(g(t) - p(t)) - q(t)(g(x) - p(x))$$

und zeigen Sie, daß sie $N+2$ Nullstellen hat.

Lösung.

(a) *Sei f eine n-mal differenzierbare Funktion mit $n+1$ Nullstellen. Wir behaupten etwas allgemeiner, daß dann $f^{(k)}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ zumindest $n+1-k$ Nullstellen besitzt. Wir beweisen die Aussage mit Induktion: Für $k = 0$ entspricht die Aussage gerade der Voraussetzung. Hat $f^{(k)}$ für $k < n$ zumindest $n+1-k$ Nullstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-k}$, so existiert in jedem der $n-k$ Intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, $j \in \{0, \ldots, n-k-1\}$, nach dem Satz von Rolle ein Punkt ξ_j mit $f^{(k+1)}(\xi_j) = 0$. Somit besitzt $f^{(k+1)}$ zumindest die $n-k$ Nullstellen ξ_j, $j \in \{0, \ldots, n-k-1\}$.*

(b) *Wir betrachten die im Hinweis vorgeschlagene, $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion h, die wegen $q(x_i) = 0$ und $g(x_i) = p(x_i)$*

$$h(x_i) = q(x)(g(x_i) - p(x_i)) - q(x_i)(g(x) - p(x)) = 0 \text{ für alle } i \in \{0, \ldots, N\}$$

erfüllt. Außerdem gilt

$$h(x) = q(x)(g(x) - p(x)) - q(x)(g(x) - p(x)) = 0.$$

- *Ist $x \notin \{x_i \mid i \in \{0, \ldots, N\}\}$, so hat die Funktion h daher $N+2$ Nullstellen. Nach Teil (a) hat daher die Funktion $h^{(N+1)}$ eine Nullstelle ξ. Um die $(N+1)$-te Ableitung von h zu berechen, bemerken wir, daß die $(N+1)$-te Ableitung einer Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich N gleich null ist, so daß $p^{(N+1)} = 0$ ist. Außerdem ist $q(x) = x^{N+1} + \tilde{q}(x)$ mit einer Polynomfunktion $\tilde{q}$ mit Grad kleiner gleich N, so daß wir $q^{(N+1)}(x) = (N+1)!$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit bekommen wir*

$$\begin{aligned} h^{(N+1)}(t) &= q(x)(g^{(N+1)}(t) - p^{(N+1)}(t)) - q^{(N+1)}(t)(g(x) - p(x)) \\ &= q(x)g^{(N+1)}(t) - (N+1)!(g(x) - p(x)), \end{aligned}$$

  also haben wir an der Nullstelle ξ:

$$g(x) - p(x) = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x).$$

- *Es bleibt der Fall, daß $x \in \{x_i \mid i \in \{0, \dots, N\}\}$ ist. In dem Fall ist*

$$g(x) - p(x) = 0 = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x)$$

für eine beliebige Wahl von ξ.

Beispiel 6.

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{\big(\tan(x)\big)^2}$,

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \tan(2x \tan(x))$.

Lösung.

(a) *Mit dem Satz von de L'Hospital bekommen wir*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\big(\tan(x)\big)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2\tan(x)(1 + \tan^2(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{2(1 + \tan^2(x))} = -\frac{1}{2}.$$

(b) *Wir nehmen den Logarithmus des Ausdrucks und bekommen mit der Stetigkeit des Logarithmus*

$$\log\left(\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n \to \infty} n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

Wir definieren nun die Funktion

$$g_x \colon]x, +\infty[\to \mathbb{R},\ g(y) := y \log\left(1 - \frac{x}{y}\right).$$

Verwenden wir den Satz von de L'Hospital, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{y \to +\infty} g_x(y) &= \lim_{y \to +\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{x}{y}\right)}{\frac{1}{y}} \\ &= \lim_{y \to +\infty} \frac{-\frac{x}{y^2} \frac{1}{1 - \frac{x}{y}}}{-\frac{1}{y^2}} = -x \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{y}} = -x. \end{aligned}$$

Insbesondere bekommen wir also

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n \to \infty} g_x(n)\right) = \exp\left(\lim_{y \to +\infty} g_x(y)\right) = \mathrm{e}^{-x}.$$

(c) *Wir schreiben den Grenzwert in der Form*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x \tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin(2x \tan(x))}{\cos(2x \tan(x))}$$

und verwenden wiederum den Satz von de L'Hospital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x \tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(h(x)) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos(h(x)) h'(x)}{-\sin(h(x)) h'(x)} = -\frac{1}{h'(\frac{\pi}{4})},$$

wobei wir als Abkürzung die stetig differenzierbare Funktion

$$h \colon]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ h(x) := 2x \tan(x),$$

eingeführt haben, deren Ableitung durch

$$h'(x) = 2\tan(x) + 2x(1 + \tan^2(x))$$

gegeben ist. Somit haben wir

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x\tan(x)) = -\frac{1}{2+\pi}.$$

Beispiel 7.

Wir betrachten die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Bestimmen Sie

(a) die Extrema,

(b) das Monotonieverhalten,

(c) die maximalen Intervalle, auf welchen f konvex oder konkav ist, sowie

(d) die Grenzwerte $\lim_{x\to-1} f'(x)$ und $\lim_{x\to 1} f'(x)$.

Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung.

Wir berechnen zuerst die ersten und zweiten Ableitungen der Funktion f, die wir in der Form $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ schreiben wollen, und bekommen:

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}},$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}},$$

woraus wir direkt die beiden in Teil (d) gefragten Grenzwerte

$$\lim_{x\downarrow -1} f'(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\uparrow 1} f'(x) = -\infty$$

bekommen.

Um die lokalen Extrema im Inneren zu finden, bestimmen wir die Nullstellen von f', das sind die Punkte $x \in \,]-1,1[$ mit

$$\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}, \text{ also } 3(1-x) = 1+x.$$

Das liefert uns den einzigen kritischen Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$. Da f' stetig ist und keine weitere Nullstelle in dem Intervall $]x_0, 1[$ hat, ist f' auf $]x_0,1[$ wegen $\lim_{x\uparrow 1} f'(x) = -\infty$ negativ. Ebenso ist f' auf $]-1, x_0[$ wegen $f'(0) = 1$ positiv. Damit ist f auf $]-1, x_0[$ monoton wachsend und auf $]x_0, 1[$ monoton fallend, was uns das in (b) gesuchte Verhalten beschreibt; und daher besitzt f in x_0 ein lokales Maximum. Außerdem folgt daraus, daß f in -1 und 1 lokale Minima hat.

Da f eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist, muß sie ebenfalls ein globales Maximum und ein globales Minimum haben, wofür nur die drei gefundenen lokalen Extrema in Frage kommen. Daher ist x_0 sogar ein globales Maximum und wegen $f(-1) = 0 = f(1)$ liegen bei beiden Punkten -1 und 1 globale Minima, womit Teil (a) beantwortet ist.

Es bleibt uns die in Teilaufgabe (c) gefragte Konvexität und Konkavität der Funktion. Dazu bestimmen wir die Nullstellen der zweiten Ableitung, also die Punkte x mit

$$\frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ und erhalten die äquivalente Bedingung

$$\frac{3}{4}(1-x)^2 - \frac{3}{2}(1+x)(1-x) - \frac{1}{4}(1+x)^2 = 0.$$

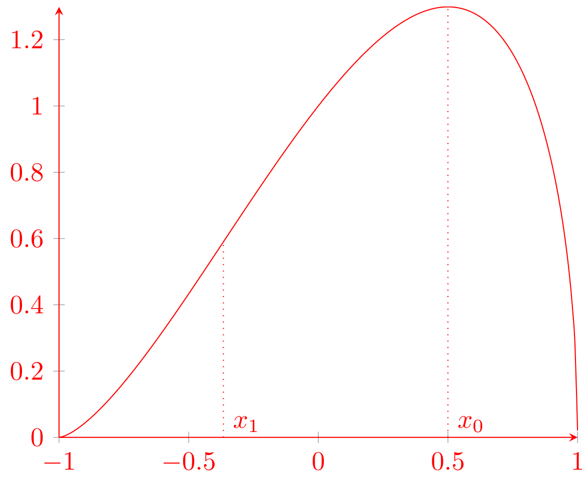
Wir multiplizieren aus und finden die quadratische Gleichung

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

mit den beiden Lösungen $x_1 := \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \in \left]-1,1\right[$ *und* $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \notin [-1,1]$. *Wegen*

$$\lim_{x\downarrow -1} f''(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x\uparrow 1} f''(x) = -\infty$$

ist daher f'' *positiv auf* $\left]-1,x_1\right[$ *und negativ auf* $\left]x_1,1\right[$. *Daher ist* f *auf* $[-1,x_1]$ *konvex und auf* $[x_1,1]$ *konkav.*



Beispiel 8.

(a) Berechnen Sie $\int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung.

(a) *Sei* F *eine Stammfunktion der Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x\cos(x)$. *Dann gilt nach partieller Integration, daß eine Stammfunktion* G *der Funktion* $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto e^x \sin(x)$, *mit*

$$F(x) = e^x \sin(x) - G(x)$$

existiert. Eine partielle Integration von G *liefert uns weiters, daß es eine Stammfunktion* $\tilde{F}$ *von* f *mit*

$$G(x) = -e^x\cos(x) + \tilde{F}(x)$$

gibt. Da F *und* $\tilde{F}$ *Stammfunktionen derselben Funktion sind, finden wir eine Konstante* $C \in \mathbb{R}$ *mit* $\tilde{F} = F - C$. *Kombinieren wir die Gleichungen, so bekommen wir daher schließlich*

$$F(x) = e^x\sin(x) + e^x\cos(x) - F(x) + C, \text{ also } F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x)+\cos(x)) + C.$$

(b) *Für* $n = 0$ *suchen wir die Stammfunktionen* I_0 *der konstanten Funktion* 1 *auf* $\mathbb{R}$, *was gerade die Funktionen der Form* $I_0(x) = x + C$ *mit einer beliebigen Konstante* $C \in \mathbb{R}$ *sind.*

Sei nun I_n *eine Stammfunktion der Funktion* $h_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_n(x) = (x^2+1)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Dann bekommen wir mit partieller Integration, daß eine Stammfunktion* J_n *der Funktion* $\tilde{h}_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\tilde{h}_n(x) := -2n\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = -2n\frac{1}{(x^2+1)^n} + 2n\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}},$$

mit

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} - J_n(x)$$

existiert. Somit finden wir eine Stammfunktion I_{n+1} *von* h_{n+1} *mit*

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} - 2nI_{n+1}(x) + 2nI_n(x), \text{ also } I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}I_n(x) + \frac{x}{2n(x^2+1)^n}.$$

Als Startwert dieser Rekursionsformel dient die Stammfunktion I_1 *von* $h_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = x^2+1$, *die von der Form*

$$I_1(x) = \arctan(x) + C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$ *ist.*