Übungsblatt 6

Beispiel 1.

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

(a) $\int \frac{1}{(\sin x)^n} \, \mathrm{d}x \quad$ auf $]0, \pi[$ für $n = 2, 3, 4, 5$ und

(b) $\int \frac{1}{x^3 + x^5} \, \mathrm{d}x \quad$ auf $]0, \infty[$.

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, deren n-te Ableitung durch

$$f^{(n)}(x) = \log(x)$$

gegeben ist.

Beispiel 3.

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Nützen Sie die in Punkt (a) bewiesene Identität, um das Integral

$$\int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x$$

für $a > 0$ als Grenzwert von Darboux-Obersummen zu berechnen.

Beispiel 4.

Verwenden Sie das Riemann-Integral, um die folgenden Grenzwerte zu berechnen

(a) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$,

(b) $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Hinweis für Teil (b): Betrachten Sie den Logarithmus des Ausdrucks.

Beispiel 5.

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ und

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, \mathrm{d}x$.

Beispiel 6.

Wir betrachten die Funktion

$$F\colon]0,\infty[\,\to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie ohne Benutzung des Logarithmus, daß F die Eigenschaften

(a) $F(xy) = F(x) + F(y)$,

(b) $F(x^\alpha) = \alpha F(x)$ und

(c) $F(\mathrm{e}^x) = x$

für alle $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ hat.

Beispiel 7.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie, daß

(a) $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ auf I nicht Riemann-integrierbar ist und

(b) jede auf I monotone Funktion dort Darboux-integrierbar ist.

Hinweis für Teil (b): Sie können den folgenden Satz verwenden (ohne ihn zu beweisen): Eine auf I beschränkte Funktion, ist dort genau dann Darboux-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$.

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Funktion

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie, daß die totale Variation von F gleich $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ist.