Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 6

Beispiel 1.

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^n}\,\mathrm{d}x$ auf $]0,\pi[$ für $n = 2,3,4,5$ und

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^5}\,\mathrm{d}x$ auf $]0,\infty[$.

Lösung.

(a) *Wir verwenden die aus der Vorlesung bekannte Substitution* $t = \tan\frac{x}{2}$. *Dann hat man*

$$\mathrm{d}t = \frac{1+t^2}{2}\,\mathrm{d}x \quad \textit{und} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Folglich betrachten wir

$$\int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^n \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2(1+t^2)^{n-1}}{(2t)^n}\,\mathrm{d}t,$$

und erhalten die Stammfunktionen:

$$n=2\text{: } \int \frac{1+t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t}+\frac{t}{2}+C.$$

$$n=3\text{: } \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+2t^2+t^4}{4t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{t^2}{8}+C.$$

$$n=4\text{: } \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{8t^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{24t^3}-\frac{3}{8t}+\frac{3t}{8}+\frac{t^3}{24}+C.$$

$$n=5\text{: } \int \frac{(1+t^2)^4}{16t^5}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8}{16t^5}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{64t^4}-\frac{1}{8t^2}+\frac{3}{8}\ln|t|+\frac{t^2}{8}+\frac{t^4}{64}+C.$$

Rückeinsetzen von $\tan\frac{x}{2}$ *für* t *liefert die gesuchten Stammfunktionen von* $(\sin x)^{-n}$.

(b) *Da* $x^3+x^5 = x^3(1+x^2)$, *machen wir folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung*

$$\frac{1}{x^3+x^5} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{dx+e}{x^2+1}.$$

Multiplikation mit x^3+x^5 *und Koeffizientenvergleich ergibt*

$$\frac{1}{x^3+x^5} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{x}{x^2+1}.$$

Folglich haben wir die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^3+x^5}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| - \frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f\colon\,]0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$, deren n-te Ableitung durch

$$f^{(n)}(x) = \log(x)$$

gegeben ist.

Lösung.

Wir beweisen induktiv, dass

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + p(x) \tag{1}$$

gilt, wobei p ein beliebiges Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Für $n = 1$ gilt die Behauptung. Für den Induktionsschritt berechnen wir die Stammfunktionen der in Gleichung (1) gegebenen Funktion. Wir vernachlässigen p, weil dessen Stammfunktionen bekannt sind. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{x^n}{n!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \int \frac{x^n}{(n+1)!}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right),\end{aligned}$$

was der gewünschte Ausdruck für $n+1$ ist.

Beispiel 3.

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Nützen Sie die in Punkt (a) bewiesene Identität, um das Integral

$$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x$$

für $a > 0$ als Grenzwert von Darboux-Obersummen zu berechnen.

Lösung.

(a) *Für $n = 1$ gilt die Gleichung. Aus der Gültigkeit für ein $n \geq 1$, folgt aber unmittelbar, dass*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3),\end{aligned}$$

was der gewünschte Ausdrück für $n+1$ ist.

(b) *Als Nächstes zerlegen wir das Intervall $[0, a]$ gleichmäßig in n Teilintervalle. Das heißt wir betrachten die Zerlegung $Z_n := \{x_0, \dots, x_n\}$, wobei $x_k := k\frac{a}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Da der Integrand monoton wachsend ist, wird das Maximum auf jedem Teilintervall am rechten Intervallrand angenommen. Es gilt also*

$$\overline{S}(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} x_k^2 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Die Obersummen konvergieren für $n \to \infty$ gegen das Riemann-Integral, weil der Integrand stetig ist. Wir erhalten also

$$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

Beispiel 4.

Verwenden Sie das Riemann-Integral, um die folgenden Grenzwerte zu berechnen

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Hinweis für Teil (b): Betrachten Sie den Logarithmus des Ausdrucks.

Lösung.

(a) *Da*

$$\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2},$$

kann man die Summe wie folgt schreiben

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

mit $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ *und den äquidistanten Zerlegungspunkten* $x_k = \frac{k}{n}$, $0 \le k \le n$. *Da* f *monoton fallend ist, hat man*

$$f(x_k) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$

weshalb die Summe eine Untersumme für $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ *ist. Aufgrund der Stetigkeit von* f *konvergiert diese Summe für* $n \to \infty$ *gegen das Riemann-Integral, das heißt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) *Wir folgen dem Hinweis und berechnen*

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdots\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)(x_k - x_{k-1}),$$

wobei $x_k := \frac{k}{n}$, $0 \le k \le n$, *und* $g(x) := \ln x$. *Wir erhalten also eine Zwischensumme für das uneigentliche Integral* $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$. *Dieses uneigentliche Integral ist wohldefiniert und gleich* -1. *Dennoch muss die Konvergenz der Zwischensummen gesondert bewiesen werden. Dazu halten wir erstens fest, dass der Logarithmus auf* $[\frac{1}{n}, 1]$ *integrierbar ist und zweitens, dass für jede integrierbare Funktion* f

$$\underline{S}(f, Z) \le \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, Z)$$

gilt. Nun folgt aus der ersten Ungleichung und der Monotonie des Logarithmus, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\frac{k}{n} \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$$

ist, während die zweite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k}{n} \ge \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$$

liefert. Insgesamt haben wir also

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$$

und der Einschließungssatz ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} = \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = -1.$$

Für den gesuchten Grenzwert ergibt sich schlussendlich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Beispiel 5.

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ und

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} \,\mathrm{d}x.$

Lösung.

Die Substitutionsregel für bestimmte Integrale lautet

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und monoton und* $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ *stetig ist.*

(a) *Wenden wir obige Formel mit* $g(t) := \sin t$ *an und integrieren danach partiell, so erhalten wir*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

(b) *Diesmal wählen wir* $g(t) := t^2$ *und integrieren wieder partiell*

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e} - \int_0^1 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2 = 2.$$

(c) *Wir setzen* $g(t) := \frac{\pi}{2} - t$ *und erhalten*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nennen wir das erste Integral dieser Gleichungskette A *und das letzte* B *so haben wir einerseits* $A = B$ *und andererseits*

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Daher ist $A = \frac{\pi}{4}$.

Beispiel 6.

Wir betrachten die Funktion

$$F\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie ohne Benutzung des Logarithmus, daß F die Eigenschaften *(a)* $F(xy) = F(x) + F(y)$,

(b) $F(x^\alpha) = \alpha F(x)$ und

(c) $F(\mathrm{e}^x) = x$

für alle $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ hat.

Lösung.

(a) *Zunächst spalten wir das Integral auf*

$$F(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$$

was auch möglich ist, wenn x nicht zwischen 1 und xy liegt, also für beliebige Werte von x und y. Das erste Integral ist gleich $F(x)$ und im zweiten substituieren wir mittels $g(s) = xs$. Insgesamt erhalten wir also

$$F(xy) = F(x) + \int_1^y \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = F(x) + F(y).$$

(b) *Für $\alpha = 0$ gilt die Gleichung. Ist $\alpha \neq 0$, so substituieren wir mittels $g(s) := s^\alpha$ und erhalten*

$$F(x^\alpha) = \int_1^{x^\alpha} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{s^\alpha}\alpha s^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s = \alpha \int_1^x \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \alpha F(x).$$

(c) *Auch hier führt Substitution zum Ziel, und zwar mittels $g(s) = \mathrm{e}^s$*

$$F(\mathrm{e}^x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \,\mathrm{d}s = x.$$

Beispiel 7.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie, daß

(a) $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ auf I nicht Riemann-integrierbar ist und

(b) jede auf I monotone Funktion dort Darboux-integrierbar ist.

Hinweis für Teil (b): Sie können den folgenden Satz verwenden (ohne ihn zu beweisen): Eine auf I beschränkte Funktion, ist dort genau dann Darboux-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$.

Lösung.

(a) *Sei $I = [a, b]$, $a < b$, und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$. Wir betrachten zwei zugehörige Folgen von Zwischenpunktsystemen $(\Sigma_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\Sigma_n^1 \subset \mathbb{Q}$ und $\Sigma_n^2 \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die entsprechenden Zwischensummen gilt dann*

$$S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^1) = \sum_k 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a > 0, \quad \textit{und}$$
$$S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^2) = \sum_k 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also

$$\lim_{n\to\infty} S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^1) \neq \lim_{n\to\infty} S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^2).$$

Der Grenzwert der Zwischensummen hängt somit von den gewählten Zwischenpunkten ab. Daher ist $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar.

(b) *Wir folgen dem Hinweis und geben ein $\varepsilon > 0$ vor. Für eine gleichmäßige Zerlegung $Z = \{a + k\frac{b-a}{n} : 0 \le k \le n\}$ und eine monoton wachsende Funktion f gilt dann*

$$\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) = \sum_{k=1}^n f(x_k)\frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}.$$

Wählen wir $n > (f(b) - f(a))(b - a)/\varepsilon$, so bleibt die Differenz zwischen Ober- und Untersumme kleiner als ε. Also ist f Darboux-integrierbar. Der Beweis für monoton fallendes f verläuft analog.

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Funktion

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie, daß die totale Variation von F gleich $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ist.

Lösung.

Zunächst halten wir fest, dass das Integral $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ wohldefiniert ist, da $|f|$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist.

Wir zeigen die Identität $V(F) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, wobei $V(F)$ die totale Variation von F bezeichnet, in zwei Schritten.

‚$\le$‘: *Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $n \ge 1$. Unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der Dreiecksungleichung für das Integral erhalten wir*

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Nehmen wir das Supremum über alle Zerlegungen, so erhalten wir $V(F) \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

‚$\ge$‘: *Wir betrachten die Darboux-Untersumme für $|f|$ bezüglich einer beliebigen Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $n \ge 1$*

$$\underline{S}(|f|, Z) = \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x)| = \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |F'(x)|.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung finden wir in jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ein ξ_k mit

$$F'(\xi_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Für die Untersumme ergibt sich daraus

$$\underline{S}(|f|, Z) \le \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}||F'(\xi_k)| = \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})|,$$

und in weiterer Folge

$$\sup_Z \underline{S}(|f|, Z) \le V(F).$$

Ist nun $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen deren Feinheit gegen 0 konvergiert, so folgt

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \lim_{j \to \infty} \underline{S}(|f|, Z_j) \le \sup_Z \underline{S}(|f|, Z) \le V(F).$$