Vorlesungsprüfung Analysis 2

Erster Termin

Name:	
Matrikelnummer:	

Bemerkungen zur Durchführung der Prüfung

- Alle Lösungen sind ausreichend zu begründen.
- Alle Beispiele werden gleich gewichtet.
- Bis auf Schreibutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die letzten beiden Seiten sind für persönliche Notizen gedacht und werden nicht bewertet.
- Der Test dauert 90 Minuten. Eine frühere Abgabe ist jederzeit möglich.

Resultat

Beispiel	Mögliche Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
Total	25	

Zur Verfügung gestellt von:
Otmar Scherzer
PR Analysis 2, SoSe 2022
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1 (5 Punkte).

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \frac{x + \frac{1}{3}}{x + \frac{2}{3}}$$

in dem Intervall $[0, \infty[$ strikt kontraktiv und eine Selbstabbildung ist.

(b) Berechnen Sie den Fixpunkt $x^\dagger$ von f.

(c) Schätzen Sie mit Hilfe der a-priori Schranke den Fehler von $x^{(5)} - x^\dagger$, wenn $x^{(0)} = 2$ gewählt wird, ab. Genauso, schätzen Sie mit Hilfe der a-posteriori Schranke den Fehler von $x^{(1)} - x^\dagger$ ab. Dabei sind $x^{(n)}$ die Iterierten der Banachschen Fixpunktiteration.

Lösung.

Beispiel 2 (5 Punkte).
Sei

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}\times\,]-1,1[\, &\to \mathbb{R}^2\,. \\ (x,y) &\mapsto \begin{pmatrix} \tan(y)+e^x \\ \ln(1+y)+x^2+y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrabbildung von $F\colon U \to V$ im Punkt $(1,0)$ für geeignet gewählte offene Mengen $U \subset \mathbb{R}\times\,]-1,1[$ und $V \subset \mathbb{R}^2$.

Lösung.

Beispiel 3 (5 Punkte).
Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f\colon \mathcal{B}(\pi,0) \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{\sin(\|x\|)}{\|x\|^2 - \pi^2},$$

Fréchet-differenzierbar ist, wobei $\mathcal{B}(\pi,0) \subset \mathbb{R}^2$ den offenen Ball mit Radius π um den Nullpunkt und $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnen.

Lösung.

Beispiel 4 (5 Punkte).
Bestimmen Sie den Punkt auf der Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + 2z = 0\},$$

der den kleinsten Abstand zum Punkt $(0, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ hat.

Lösung.

Beispiel 5 (5 Punkte).
Berechnen Sie das Integral

$$\int_V |z| \ln(1 + x^2 + y^2) \, \mathrm{d}(x, y, z)$$

über das Ellipsoid

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 \leqslant 1\}.$$

Lösung.

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).

Persönliche Notizen (werden nicht gewertet).