Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 1

Zur Verfügung gestellt von:
Otmar Scherzer
UE Analysis 1, WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250012
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Beispiel 1.

Bestimmen Sie das Innere, den Abschluß und den Rand der Mengen

(a) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| < 2\}$ in $\mathbb{C}$,

(b) $A_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists r \in \mathbb{Z} : y = rx\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(c) $A_3 := \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und

(d) $A_4 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

Lösung.

Wir wollen vorausschicken, daß aus der Definition direkt folgt, daß für jede Menge A stets $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ gilt.

(a)

- *Sei z ein Punkt mit $1 < |z| < 2$. Setzen wir $\varepsilon := \min\{2 - |z|, |z| - 1\}$, so liegt wegen*

  $$1 \le |z| - \varepsilon < |w| < |z| + \varepsilon \le 2$$

  jeder Punkt $w \in \mathrm{B}_\varepsilon(z)$ auch in A_1. Ist jedoch $|z| = 1$, so finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $w \in \mathrm{B}_\varepsilon(z)$, welches nicht in A_1 liegt. Wir können beispielsweise $w = (1 - \frac{\varepsilon}{2})z$ im Fall $\varepsilon < 1$ und $w = 0$ im Fall $\varepsilon \ge 1$ wählen. Daher ist

  $$\mathring{A}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}.$$

- *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A_1, die in $\mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion:*

  $$|\lim_{n\to\infty} z_n| = \lim_{n\to\infty} |z_n| \in [1,2].$$

  Also ist $\overline{A_1} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 2\}$.
  Ist $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $|z| = 2$, so gilt für die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n := (1 - \frac{1}{n+1})z$, daß $1 \le \frac{1}{2}|z| \le |z_n| < |z| = 2$ ist, weshalb $z_n \in A_1$ liegt, und

  $$|z - z_n| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty)$$

  ist, weshalb $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert. Also ist $\overline{A_1} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 2\}$.

- *Für den Rand bekommen wir daraus*

  $$\partial A = \overline{A_1} \setminus \mathring{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}.$$

(b)

- *Sei $\varepsilon > 0$ und $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ ein Kreis in $\mathbb{R}^2$ um einen Punkt $(x,y) \in A_2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist $y = rx$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Wir wählen nun $\delta \in]0,1[$ so klein, daß $|\delta\frac{x}{2}| < \varepsilon$ ist. Dann ist jedoch $(x, y + \delta\frac{x}{2})$ nicht in A_2, da sonst ein $\tilde{r} \in \mathbb{Z}$ mit $y + \delta\frac{x}{2} = \tilde{r}x$, also $\tilde{r} - r = \frac{\delta}{2} \in]0,1[$ existieren müßte. Daher ist $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ keine Teilmenge von A_2 und damit $(x,y) \notin \mathring{A}_2$.*
  Es bleibt der Punkt $(0,0) \in A_2$. Dann gilt jedoch für jedes $\varepsilon > 0$, daß $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \notin A_2$ ist, weshalb auch $(0,0) \notin \mathring{A}_2$ ist. Also ist $\mathring{A}_2 = \emptyset$.

- *Ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_2$, so ist entweder $x = 0$ und $y \ne 0$ oder es gibt ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mit $y = rx$. Im zweiten Fall liegt der Punkt (x,y) zwischen den Geraden $\{\lambda(1, \lfloor r \rfloor) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{\lambda(1, \lfloor r \rfloor + 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bezeichnet $\varepsilon > 0$ den kleineren der beiden Abstände des Punkts zu den beiden Geraden, so ist $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \cap A_2 = \emptyset$, weshalb es keine Folge aus A_2 geben kann, die gegen (x,y) konvergiert. Somit ist in dem Fall $(x,y) \notin \overline{A_2}$.*
  Betrachten wir einen Punkt $(0,y)$ mit $y \ne 0$, so können wir die Punkte $(x_n, y_n) := (\frac{y}{n+1}, y)$, $n \in \mathbb{N}$, betrachten. Dann ist $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $y_n = (n+1)x_n$ eine Folge in A_2 mit Grenzwert $(0,y)$. Damit haben wir also

  $$\overline{A_2} = A_2 \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

  gefunden.

- *Da das Innere leer ist, ergibt sich für den Rand* $\partial A_2 = \overline{A_2}$.

(c) *Da zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen eine irrationale Zahl liegt, haben wir in jedem offenen Intervall in* $\mathbb{R}$ *eine irrationale Zahl. Daher ist* $\mathring{A}_3 = \emptyset$.

Andererseits finden wir zu jeder irrationalen Zahl x *eine rationale Folge* $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \neq 0$, *die gegen* x *konvergiert, zum Beispiel haben wir für* $q_n = n+1$ *und* $p_n = \lfloor xq_n \rfloor$, *daß*

$$0 \leq x - \frac{p_n}{q_n} \leq x - \frac{x(n+1)-1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Somit ist $\overline{A_3} = \mathbb{R}$ *und daher auch* $\partial A_3 = \mathbb{R}$.

(d) *Da jeder Kreis in* $\mathbb{C}$ *um einen Punkt in* $\mathbb{R}$ *auch ein offenes Intervall in* $\mathbb{R}$ *enthält, und in jedem offenen Intervall eine rationale Zahl liegt, bekommen wir wie vorhin* $\mathring{A}_4 = \emptyset$.

Da zwischen beliebigen rationalen Zahlen eine irrationale Zahl liegt, können wir für eine beliebige rationale Zahl $q \in \mathbb{R}$ *eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *irrationaler Zahlen mit* $x_n \in \,]q, q+\frac{1}{n+1}[$ *finden, die damit gegen* q *konvergiert. Daher ist* $\mathbb{R} \subset \overline{A_4}$.

Betrachten wir eine Zahl $x + \mathrm{i}y$ *mit* $y \neq 0$, *so ist* $\mathrm{B}_y(x+\mathrm{i}y) \cap A_4 = \emptyset$, *weshalb wir keine gegen* $x+\mathrm{i}y$ *konvergierende Folge in* A_4 *finden können. Also ist* $\overline{A_4} = \mathbb{R}$ *und damit* $\partial A_4 = \mathbb{R}$.

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ die Beziehung

$$\mathring{A} = \mathbb{C}^n \setminus \overline{A^c}$$

gilt, wobei $A^c = \mathbb{C}^n \setminus A$ das Komplement von A in $\mathbb{C}^n$ bezeichne.

Lösung.

‚$\subset$': *Sei* $z \in \mathring{A}$. *Dann existiert nach Definition ein Radius* $\varepsilon > 0$ *mit* $\mathrm{B}_\varepsilon(z) \subset A$. *Also gilt für jede Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* A^c, *daß* $|z_n - z| \geq \varepsilon$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist, weshalb die Folge nicht gegen* z *konvergieren kann. Somit ist* $z \notin \overline{A^c}$.

‚$\supset$': *Wir beweisen die Kontraposition: Sei also* $z \notin \mathring{A}$. *Wir wählen eine beliebige Folge* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *positiver Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. *Dann finden wir zu jedem* $n \in \mathbb{N}$, *einen Wert* $z_n \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(z) \cap A^c$. *Damit gilt für die Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* A^c, *daß*

$$0 \leq \|z_n - z\| < \varepsilon_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

ist, sie also gegen z *konvergiert, womit* $z \in \overline{A^c}$ *gezeigt ist.*

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktionen

(a) $f_1\colon [0,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sqrt[n]{x}$, für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \lfloor x \rfloor$,

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) := \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$,

(d) $f_4\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) := (x^2 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 3)g(|x|)^{-1}$, und

(e) $f_5\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) := x\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$,

stetig sind, wobei $g\colon]0,\infty[\, \to \,]0,\infty[$ eine beliebige stetige Funktion bezeichne und die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

definiert sei.

Lösung.

(a) *Seien $x \in [0,\infty[$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta := \varepsilon^n$. Dann gilt für alle $\tilde{x} \in]x-\delta, x+\delta[\cap [0,\infty[$, daß*

$$\tilde{x} < x + \varepsilon^n \leq (\sqrt[n]{x} + \varepsilon)^n \text{ und } x < \tilde{x} + \varepsilon^n \leq (\sqrt[n]{\tilde{x}} + \varepsilon)^n$$

ist. Also haben wir

$$\sqrt[n]{x} - \varepsilon < \sqrt[n]{\tilde{x}} < \sqrt[n]{x} + \varepsilon, \text{ und daher } |f_1(\tilde{x}) - f_1(x)| < \varepsilon,$$

was zeigt, daß f_1 in jedem Punkt $x \in [0,\infty[$ stetig ist.

(b) *Da f_2 für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $]n, n+1[$ konstant gleich n und damit stetig ist, jedoch*

$$f_2(n) = n \neq n - 1 = \lim_{k\to\infty} f(n - \tfrac{1}{k})$$

gilt, weshalb f_2 in $n \in \mathbb{N}$ nicht stetig ist, ist f_2 genau auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig.

(c) *Wie zuvor sehen wir, daß f_3 für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf den Intervallen $]-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}[$ und $]\sqrt{n}, \sqrt{n+1}[$ konstant gleich $\sqrt{n}$ und damit stetig ist, jedoch für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$f_3(-\sqrt{n}) = \sqrt{n} \neq \sqrt{n-1} = \lim_{k\to\infty} f_3(-\sqrt{n - \tfrac{1}{k}}) \text{ und } f_3(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \neq \sqrt{n-1} = \lim_{k\to\infty} f_3(\sqrt{n - \tfrac{1}{k}})$$

gilt, weshalb f_3 in $-\sqrt{n}$ und $\sqrt{n}$ nicht stetig ist.

Den Punkt 0 betrachten wir separat: Da f_3 konstant gleich null auf $]-1,1[$ ist, ist f_3 in 0 stetig.

Also ist f_3 genau auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ stetig.

(d) *Sei $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ebenfalls beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Dann gilt, da kein Nenner gegen null geht, die Betragsfunktion und die dritte Wurzel stetig in x und g stetig in $|x|$ ist, daß*

$$\lim_{k\to\infty} f_4(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k^2 + 2x_k^{-\frac{1}{3}} + 3}{g(|x_k|)} = \frac{(\lim_{k\to\infty} x_k)^2 + 2(\lim_{k\to\infty} x_k)^{-\frac{1}{3}} + 3}{g(|\lim_{k\to\infty} x_k|)} = f_5(x)$$

ist, weshalb f_4 auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist.

(e) *Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ irrationaler Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Daher haben wir*

$$f_5(x) = 0 \neq x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} f(x_k),$$

weshalb f_5 in keinem Punkt in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ stetig ist.

Ebenso finden wir jedoch auch für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine rationale Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} y_k = x$. Damit bekommen wir

$$f_5(x) = x \neq 0 = \lim_{k\to\infty} f(y_k),$$

so daß f_5 auch in keinem Punkt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Einzig in 0 finden wir, daß für jede Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$

$$|f_5(z_k)| \leq |z_k| \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und damit } \lim_{k\to\infty} f_5(z_k) = 0$$

gilt.

Beispiel 4.

Sei

$$f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{p(z)}{q(z)},$$

eine rationale Funktion mit zwei Polynomfunktionen $p, q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = \prod_{i=1}^{m}(z - a_i) \text{ und } q(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - b_j)$$

für Punkte $(a_i)_{i=1}^m$ und $(b_j)_{j=1}^n$ in $\mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{C}$, auf der f wohldefiniert und stetig ist.

(b) Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge $\hat{D} \supset D$ von $\mathbb{C}$, für die eine stetige Funktion $\hat{f}\colon \hat{D} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_D = f$ existiert.

Lösung.

(a) *Die Funktion f ist genau für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$ wohldefiniert. Da Polynomfunktionen stetig sind, ist f als Quotient zweier stetiger Funktionen auf $\{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{b_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$ auch stetig.*

(b) *Sei $z = b_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir definieren $I_z := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid a_i = z\}$ und $J_z := \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid b_j = z\}$ und setzen $I_z^c := \{1, \ldots, m\} \setminus I_z$ und $J_z^c := \{1, \ldots, n\} \setminus J_z$.*

Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen z konvergierende Folge. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, für das $\{a_i \mid i \in \{1, \ldots, m\}\} \cap \mathrm{B}_\varepsilon(z) \subset \{z\}$ und $\{b_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\} \cap \mathrm{B}_\varepsilon(z) = \{z\}$ ist. Dann finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in \mathrm{B}_\varepsilon(z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- *Ist $\operatorname{card}(I_z) > \operatorname{card}(J_z)$, so haben wir daher mit $\hat{f}(z) := 0$, daß*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z_n - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z_n - b_j)}(z_n - z)^{\operatorname{card}(I_z)-\operatorname{card}(J_z)} = 0$$

  gilt.

- *Ist $\operatorname{card}(I_z) = \operatorname{card}(J_z)$, so bekommen wir*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z_n - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z_n - b_j)} = \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z - b_j)} =: \hat{f}(z).$$

- *Für $\operatorname{card}(I_z) < \operatorname{card}(J_z)$ haben wir jedoch*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{i\in I_z^c}(z_n - a_i)}{\prod_{j\in J_z^c}(z_n - b_j)} \frac{1}{(z_n - z)^{\operatorname{card}(J_z)-\operatorname{card}(I_z)}} = \infty.$$

Somit ist $\hat{D} = D \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus D \mid \operatorname{card}(I_z) \geq \operatorname{card}(J_z)\}$.

Beispiel 5.

Seien $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, stetige Funktionen. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} f_j(x),$$

stetig ist.

Lösung.

- *Wir bemerken, daß für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Beziehung*

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

  gilt, da $|a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$ und $a + b = \max\{a, b\} + \min\{a, b\}$ ist.

- *Außerdem bemerken wir, daß für beliebige endliche Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ stets*

$$\max(A \cup B) = \max\{\max(A), \max(B)\}$$

  gilt, da für $z := \max\{\max(A), \max(B)\}$ offenbar für jedes $a \in A$ sowie für jedes $b \in B$ zwangsläufig $z \geq \max(A) \geq a$ und $z \geq \max(B) \geq b$ gilt und zudem $z \in \{\max(A), \max(B)\} \subset A \cup B$ ist.

- *Wir beweisen die Aussage nun nach Induktion in $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei also $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Funktionen $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und*

  $$C := \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid g_n \text{ ist stetig}\}, \text{ wobei } g_n := \max_{j\in\{1,\dots,n\}} f_j(x)$$

  sei. Nach Voraussetzung ist $g_1 = f_1$ stetig, also $1 \in C$. Liegt $n \in C$, so folgt, daß die Kombination

  $$g_{n+1} = \max\{g_n, f_{n+1}\} = \frac{1}{2}(g_n + f_{n+1} + |g_n - f_{n+1}|)$$

  stetiger Funktionen wiederum stetig ist. Damit ist $n+1 \in C$ und nach vollständiger Induktion somit $C = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beispiel 6.

Bestimmen Sie, in welchen Punkten die Funktion

$$f\colon [0,\infty[^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y > x, \\ \frac{y}{x} & \text{für } x > y, \\ 1 & \text{für } x = y, \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung.

- *Sei $(x,y) \in [0,\infty[^2$ ein Punkt mit $y > x$. Dann gilt für $\varepsilon := \frac{1}{2}|y-x|$, daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \subset \{(\tilde{x},\tilde{y}) \mid \tilde{y} > \tilde{x}\}$. Ist nun $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$, die gegen (x,y) konvergiert, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, für das $(x_n,y_n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ liegt für alle $n \geq N$. Darum ist*

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y},$$

  weshalb f im Punkt (x,y) stetig ist.

- *Analog gilt für jeden Punkt $(x,y) \in [0,\infty[^2$ mit $x > y$, daß ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $(x_n,y_n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \subset \{(\tilde{x},\tilde{y}) \mid \tilde{y} < \tilde{x}\}$ für alle $n \geq \tilde{N}$ existiert, wenn $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen (x,y) konvergierende Folge ist, und wir damit*

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}$$

  haben.

- *Sei $y = x > 0$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{2}|x|$, so daß $\mathrm{B}_\varepsilon(x,y) \subset [\frac{1}{2}|x|,\infty[^2$ ist. Für eine gegen (x,y) konvergierende Folge $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden wir ein $\hat{N} \in \mathbb{N}$ so, daß $(x_n,y_n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x,y)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \hat{N}$.*
  Dann gilt

  $$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\min\{x_n,y_n\}}{\max\{x_n,y_n\}} \leq f(x_n,y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\max\{x_n,y_n\}}{\min\{x_n,y_n\}} = 1,$$

  womit gezeigt ist, daß $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 1$ und damit f stetig in (x,y) ist.

- *Schließlich betrachten wir den Punkt $(0,0)$. Für die gegen $(0,0)$ konvergierende Folge $(0,\frac{1}{n})$ gilt*

  $$\lim_{n\to\infty} f(0,\tfrac{1}{n}) = 0 \neq 1 = f(0,0),$$

  weshalb f nicht stetig in $(0,0)$ ist.

Beispiel 7.

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt konkav, falls

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \text{ für alle } \lambda \in [0,1] \text{ und alle } x,y \in]a,b[$$

gilt. Zeigen Sie, daß jede konkave Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ auf $]a,b[$ stetig ist.

Lösung.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert $x \in]a,b[$. Wir wählen einen beliebigen Wert $\varepsilon > 0$, für den $x-\varepsilon, x+\varepsilon \in]a,b[$ gilt. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

- *Wir schreiben dann x_n für $n \geq N$ als Linearkombination der Punkte x und $x+\sigma_n\varepsilon$, wobei wir das Vorzeichen $\sigma_n := \operatorname{sign}(x_n - x)$ einführen:*

  $$x_n = \lambda_n x + (1-\lambda_n)(x+\sigma_n\varepsilon),$$

  woraus sich der Ausdruck

  $$\lambda_n := \frac{x+\sigma_n\varepsilon - x_n}{\sigma_n\varepsilon} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}|x_n - x| \in [0,1]$$

  für λ_n ergibt. Insbesondere haben wir $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 1$.

  Damit folgt aus der Konkavität der Funktion f, die untere Schranke

  $$f(x_n) \geq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(x+\sigma_n\varepsilon) =: z_n \text{ für alle } n \geq N$$

  an die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

- *Schreiben wir für $n \geq N$ andererseits x als Linearkombination von x_n und $x - \sigma_n\varepsilon$, so bekommen wir*

  $$x = \mu_n x_n + (1-\mu_n)(x - \sigma_n\varepsilon)$$

  mit

  $$\mu_n := \frac{\sigma_n\varepsilon}{x_n - x + \sigma_n\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|x_n - x| + \varepsilon} \in [\tfrac{1}{2}, 1].$$

  Wiederum sehen wir, daß $\lim_{n\to\infty}\mu_n = 1$ ist.

  Aus der Konkavität folgt daraus

  $$f(x) \geq \mu_n f(x_n) + (1-\mu_n) f(x - \sigma_n\varepsilon),$$

  also die untere Schranke

  $$f(x_n) \leq \frac{1}{\mu_n} f(x) + \left(1 - \frac{1}{\mu_n}\right) f(x - \sigma_n\varepsilon) =: y_n \text{ für alle } n \geq N.$$

Somit haben wir

$$y_n \leq f(x_n) \leq z_n \text{ für alle } n \geq N$$

und

$$\lim_{n\to\infty} y_n = f(x) = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

woraus folgt, daß die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Damit ist gezeigt, daß f in jedem beliebigen Punkt $x \in]a,b[$ stetig ist.

Beispiel 8.

Eine Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, wenn für jeden Punkt $x \in]a,b[$ und jede gegen den Punkt x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

gilt.

Zeigen Sie, daß eine Funktion $f\colon]a,b[$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn die Funktion

$$\hat{f}\colon]a,b[\to \mathbb{R},\ \hat{f}(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\},$$

mit f übereinstimmt.

Lösung.

‚$\Leftarrow$': Angenommen f wäre nicht unterhalbstetig. Dann finden wir einen Punkt $x \in]a,b[$ und eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ und } \liminf_{k\to\infty} f(x_k) < f(x)$$

gilt. Insbesondere existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(x_k) < f(x) - \varepsilon$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Da x der Grenzwert der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit $|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n+1}$ und $f(x_{k_n}) < f(x) - \varepsilon$. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\} \le f(x_{k_n}) \le f(x) - \varepsilon$$

und daher $\hat{f}(x) \le f(x) - \varepsilon$.

‚$\Rightarrow$': Gilt umgekehrt $\hat{f} \neq f$, so finden wir, da nach Definition $\hat{f} \le f$ gilt, einen Punkt $x \in]a,b[$ mit $\hat{f}(x) < f(x)$. Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|y_n - x| < \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} f(y_n) &< \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\} + \frac{1}{n+1} \\ &\le \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{m+1}}(x)\} + \frac{1}{n+1} = \hat{f}(x) + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x, \text{ aber } \liminf_{n\to\infty} f(y_n) \le \hat{f}(x) < f(x),$$

weshalb f nicht unterhalbstetig ist.

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 2

Beispiel 1.

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f_1, f_2 \colon A \to \mathbb{R}$, $f \colon A \to B$ und $g \colon B \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, daß die Summe $f_1 + f_2 \colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, daß das Produkt $f_1 f_2 \colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, wenn f_1 und f_2 beschränkt sind. Finden Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, daß nur eine der beiden Funktionen beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, daß $g \circ f \colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

(a) *Seien $f_1, f_2 \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$, sodass $|f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta_1$. Genauso gibt es ein $\delta_2 > 0$, für welches $|f_2(x) - f_2(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta_2$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung gilt damit für die Summe*

$$|(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(y)| \le |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| < 2\varepsilon$$

für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

(b) *Sind f_1 und f_2 zusätzlich beschränkt, so erhalten wir, wieder unter Verwendung der Dreiecksungleichung, die folgende Abschätzung für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$*

$$\begin{aligned} |(f_1 f_2)(x) - (f_1 f_2)(y)| &= |(f_1 f_2)(x) - f_1(x) f_2(y) + f_1(x) f_2(y) - (f_1 f_2)(y)| \\ &\le |(f_1 f_2)(x) - f_1(x) f_2(y)| + |f_1(x) f_2(y) - (f_1 f_2)(y)| \\ &= |f_1(x)||f_2(x) - f_2(y)| + |f_2(y)||f_1(x) - f_1(y)| \\ &\le M_1 \varepsilon + M_2 \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei M_i eine obere Schranke für $|f_i|$ ist.

Als Gegenbeispiel betrachte man $A := \mathbb{R}$, $f_1(x) := x$, sowie die stückweise lineare „Zick-Zack-Funktion“

$$f_2(x) := |x - k|, \quad x \in [k - 1, k + 1[, \quad k \in 2\mathbb{Z}.$$

Dann gilt für das Produkt

$$(f_1 f_2)(k) = \begin{cases} 0, & k \in 2\mathbb{Z}, \\ k, & k \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

Wählen wir nun beispielsweise $\varepsilon = 1$, so müssen wir zeigen, dass wir für jedes $\delta > 0$ zwei Punkte x, y finden mit $|x - y| < \delta$, aber $|f_1 f_2(x) - f_1 f_2(y)| > 1$. Setzt man $x = k \in 2\mathbb{N}$ und $y = x + \min\{\delta/2, 1\}$, so gilt

$$|f_1 f_2(x) - f_1 f_2(y)| = f_1 f_2(y) = (k + \min\{\delta/2, 1\}) \min\{\delta/2, 1\} \to \infty \quad \text{für } k \to \infty.$$

(c) *Sei $\varepsilon > 0$. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sodass $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ für alle x, y mit $|x - y| < \delta$. Da f ebenfalls gleichmäßig stetig ist, können wir aber auch ein $\gamma = \gamma(\delta(\varepsilon)) > 0$ finden, sodass $|f(u) - f(v)| < \delta$ für alle u, v mit $|u - v| < \gamma$. Insgesamt gilt also für alle solchen u, v, dass $|g(f(u)) - g(f(v))| < \varepsilon$.*

Beispiel 2.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$, mit reellen Koeffizienten $(a_k)_{k=0}^{n}$, *(b)* $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

Lipschitz-stetig und ob sie gleichmäßig stetig sind.

Lösung.

(a) *Im Fall $f_1(x) = a_1 x + a_0$ gilt $|f_1(x) - f_1(y)| = |a_1||x - y|$. Also ist f_1 Lipschitz-stetig. Aus Beispiel 6 (mit $\alpha = 1$) folgt, dass jede Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist.*

Polynome vom Grad $n \geq 2$ sind nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ und somit auch nicht Lipschitz-stetig.

1. Variante: *Wir zeigen dies, indem wir für jedes $\delta > 0$ ein x finden, sodass $|f_1(x) - f_1(x+\delta)|$ beliebig groß wird. Für $x > 0$ liefert die umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$
\begin{aligned}
|f_1(x+\delta) - f_1(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k((x+\delta)^k - x^k) \right| \\
&\geq |a_n|((x+\delta)^n - x^n) - \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|((x+\delta)^k - x^k).
\end{aligned}
$$

Ist $a_n \neq 0$, so ist diese untere Schranke ein Polynom vom Grad $n - 1 \geq 1$ in x, wobei der Koeffizient der höchsten Potenz positiv ist. Also gilt $|f_1(x+\delta) - f_1(x)| \to \infty$ für $x \to \infty$.

2. Variante: *Nehmen wir an, die Funktion f_2 wäre für ein $n \geq 2$ und $a_n \neq 0$ gleichmäßig stetig. Dann finden wir gemäß Beispiel 5 Parameter $a, b \in \,]0, +\infty[$ mit $|f_2(x)| \leq a|x| + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das führt uns jedoch zum Widerspruch*

$$
1 \geq \lim_{x \to +\infty} \frac{|f_2(x)|}{c|x| + b} = \lim_{x \to +\infty} |x|^{n-1} \frac{|a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}|}{c + \frac{b}{|x|}} = +\infty.
$$

(b) *Die Funktion f_2 ist sowohl Lipschitz- als auch gleichmäßig stetig aufgrund der folgenden direkten Abschätzung*

$$
\begin{aligned}
|f_2(x) - f_2(y)| &= \frac{|\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}|}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{x^2+1}} \leq |\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}| \\
&= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{|x-y||x+y|}{\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x^2+1}} \leq |x - y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, für welche Parameter $a \in [0, \infty[$ und $p \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ (oder allgemeiner $p \in \mathbb{Q}$) die Funktion

$$
f\colon]a, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x^p,
$$

Lipschitz-stetig und für welche sie gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

- *Für $p = 0$ ist f konstant und damit offenbar für alle $a \in [0, \infty[$ Lipschitz-stetig (und daher nach Beispiel 6 automatisch auch gleichmäßig stetig).*
- *Ist $p = 1$, so ist f ebenfalls Lipschitz-stetig für alle $a \in [0, \infty[$, da $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ ist.*
- *Der Fall $p < 0$ ist repräsentiert durch $p = -1$.*
  - *Ist $a > 0$, so gilt für $p = -1$:*

    $$
    |f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq \frac{|x-y|}{a^2},
    $$

    woraus Lipschitz-Stetigkeit folgt.
    Für allgemeines $p < 0$, schreiben wir für $y > x$

    $$
    \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{1}{x^{|p|+1}} \frac{|1 - (\frac{y}{x})^p|}{|\frac{y}{x} - 1|}.
    $$

Wir betrachten daher die Funktion

$$g\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ g(z) := \frac{z^p - 1}{z-1}.$$

Diese Funktion g ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.
Wegen der geometrischen Summenformel $w^m - 1 = (w-1)\sum_{k=0}^{m-1} w^k$ haben wir außerdem für alle $m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$z^{\frac{m}{n}} - 1 = (z^{\frac{1}{n}} - 1)\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}} \text{ und } (z^{\frac{1}{n}} - 1)\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}} = z - 1,$$

so daß wir

$$\frac{z^{\frac{m}{n}} - 1}{z-1} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}}}$$

schreiben können.
Daher gilt für $p = -\frac{m}{n}$

$$\lim_{z\to 1} g(z) = -\lim_{z\to 1} z^p \frac{z^{|p|} - 1}{z-1} = -\lim_{z\to 1} z^{-\frac{m}{n}} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}}} = -\frac{m}{n} = p.$$

Wir können daher g mit $g(1) := p$ stetig auf $[1,+\infty[$ fortsetzen. Da wir wegen $\lim_{z\to+\infty} g(z) = 0$ ein $C > 0$ mit $|g(z)| < 1$ für alle $z > C$ finden können und $|g|$ auf $[1, C]$ ein Maximum besitzt, zeigt das, daß g beschränkt ist.
Somit ist aber für alle $y > x$ (und aus Symmetriegründen daher auch für alle $y < x$)

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq \frac{1}{a^{|p|+1}} \sup_{z\in]1,+\infty[} |g(z)|,$$

was die Lipschitz-Stetigkeit von f beweist.

- *Um zu zeigen, dass f im Fall $p = -1$ und $a = 0$ jedoch nicht einmal gleichmäßig stetig ist, betrachten wir zwei Punkte $x = 1/k$ und $y = 1/(k+1)$ für $k \in \mathbb{N}$. Für wachsendes k liegen x und y beliebig nahe beieinander. Andererseits gilt für die entsprechenden Funktionswerte $|f(x) - f(y)| = 1$.*
  Für allgemeines $p < 0$ und $a = 0$ können wir wie in Beispiel 5 argumentieren, um zu sehen, daß Parameter $b, c > 0$ mit $|f(x)| \leq bx + c$ existieren müßten, wenn f gleichmäßig stetig wäre. Das ist jedoch nicht möglich, da wir sonst den Widerspruch

  $$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{bx+c} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{|p|}(bx+c)} = +\infty$$

  hätten.

- *Betrachten wir nun den Fall $p \in]0,1[$, repräsentiert durch $p = 1/2$.*
  - *Für $a > 0$ haben wir für $p = \frac{1}{2}$, daß f wegen*

    $$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{a}}$$

    Lipschitz-stetig ist.
    Für allgemeines $p \in]0,1[$ schreiben wir für $x < y$

    $$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = \frac{1}{x^{1-p}} \frac{|(\frac{y}{x})^p - 1|}{|\frac{y}{x} - 1|} = \frac{1}{x^{1-p}} |g(\tfrac{y}{x})|.$$

    Wie zuvor haben wir für $p = \frac{m}{n}$

    $$\lim_{z\to 1} g(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} z^{\frac{k}{n}}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\frac{\ell}{n}}} = p \text{ und } \lim_{z\to+\infty} g(z) = 0,$$

so daß g auch in diesem Fall eine beschränkte Funktion ist. Somit gilt wieder für alle $x \neq y$:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq \frac{1}{a^{1-p}} \sup_{z\in]1,+\infty[} |g(z)|,$$

was die Lipschitz-Stetigkeit und damit insbesondere die gleichmäßige Stetigkeit beweist.

– *Für $a = 0$ erhalten wir aus dem Lösungsvorschlag von Beispiel 3.(a) von Übungsblatt 1 die gleichmäßige Stetigkeit der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $]0,\infty[$. Allerdings erhalten wir für die Punkte $x = \frac{1}{2}\delta$ und $y = \delta$ den für $\delta \to 0$ unbeschränkten Ausdruck*

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\delta}},$$

weshalb die Funktion nicht Lipschitz-stetig ist.
Daß f für allgemeines $p \in]0,1[$ nicht Lipschitz-stetig ist, sehen wir mit $x = \frac{\delta}{2}$ und $y = \delta$ ebenso direkt aus

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{1}{x^{1-p}}|g(\tfrac{y}{x})| = \frac{2^{1-p}}{\delta^{1-p}}(2^p-1) \to +\infty \ (\delta \to 0).$$

Um die gleichmäßige Stetigkeit zu zeigen, schreiben wir wiederum für $0 < x < y$

$$|f(x)-f(y)| = \frac{|x-y|}{y^{1-p}}|g(\tfrac{x}{y})| \leq \frac{|x-y|}{y^{1-p}} \sup_{z\in]0,1[} |g(z)|,$$

wobei die auf $]0,1[$ definierte Funktion $g\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $g(z) := \frac{z^p-1}{z-1}$, wegen $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ und $\lim_{z\to 1} g(z) = p$ ebenfalls beschränkt ist.
Mit $|y-x| = y-x < y$ folgt daher

$$|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^p \sup_{z\in]0,1[} |g(z)|,$$

weshalb f Hölder-stetig mit Exponent p und daher nach Beispiel 6 insbesondere gleichmäßig stetig ist.

- *Daß f im Fall $p > 1$ (insbesondere für $p = 2$) für kein $a \in [0,\infty[$ gleichmäßig stetig ist, folgt wie zuvor daraus, daß keine Parameter $b, c > 0$ mit $|f(x)| \leq bx + c$ existieren können, da sonst*

$$1 \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{bx+c} = +\infty$$

gälte.

Beispiel 4.

(a) Finden Sie eine Funktion $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Finden Sie eine Funktion $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

Sei $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Zick-Zack-Funktion aus Beispiel 1, Punkt (b).

(a) *Wir definieren $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ als $f(x) := z(1/x)$ und zeigen, dass wir für jedes $\delta \in]0,1[$ zwei Werte x, y mit $|x-y| < \delta$ finden sodass $|f(x)-f(y)| = 1$. Setzen wir beispielsweise $x = 1/k$ und $y = 1/(k+1)$ für $k \in 2\mathbb{N}$, so ist klar, dass wir $|x-y|$ beliebig klein machen können. Andererseits gilt*

$$|f(x)-f(y)| = z(k+1) = 1.$$

(b) *Diesmal definieren wir* $g\colon [0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ *über* $g(x) := z(x^2)$. *Wir argumentieren wie in Punkt (a). Setzt man* $x = \sqrt{k}$ *und* $y = \sqrt{k+1}$ *für* $k \in 2\mathbb{N}$, *so konvergiert der Abstand*

$$|x-y| = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

für steigendes k *gegen 0. Andererseits ist*

$$|g(x) - g(y)| = z(k+1) = 1.$$

Beispiel 5.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie, daß reelle Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a|x| + b \leq f(x) \leq c|x| + d \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

existieren.

Lösung.

Da f *gleichmäßig stetig ist, finden wir ein* $\delta > 0$, *für das* $|f(x) - f(y)| \leq 1$ *ist für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $|x-y| \leq \delta$. *Damit gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(0)| &\leq |f(x) - f(\operatorname{sign}(x)\delta\lfloor \tfrac{1}{\delta}|x|\rfloor)| + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{\delta}|x|\rfloor - 1} |f(\operatorname{sign}(x)(k+1)\delta) - f(\operatorname{sign}(x)k\delta)| \\ &\leq \lfloor \tfrac{1}{\delta}|x|\rfloor + 1 \leq \frac{1}{\delta}|x| + 1.\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$-|f(0)| - 1 - \frac{1}{\delta}|x| \leq -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \leq |f(0)| + 1 + \frac{1}{\delta}|x|.$$

Beispiel 6.

Wir nennen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Hölder-stetig zu einem rationalen[1] Exponenten $\alpha \in\ ]0,1]$, falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

existiert. Zeigen Sie, daß jede Hölder-stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu einem rationalen Exponenten $\alpha \in\ ]0,1]$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung.

Sei $\varepsilon > 0$. *Dann gilt für* $\delta := (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}$:

$$|x-y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \leq C\delta^\alpha = \varepsilon \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 7.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |(x-1)^2 - 2|.$$

Lösung.

Die Funktion f *hat kein globales Maximum, da* $f(x) \to \infty$ *für* $|x| \to \infty$. *Andererseits sind wegen* $f \geq 0$ *die Nullstellen* $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ *globale Minima von* f.

[1] Die gleiche Definition samt folgender Aussage gilt genauso für irrationale Exponenten. Wir formulieren es jedoch nur für rationale Exponenten, da das Potenzieren mit irrationalen Exponenten bisher noch nicht eingeführt wurde.

Um die lokalen Extrema zu bestimmen, betrachten wir das quadratische Polynom $\tilde{f}(x) = (x-1)^2 - 2$. *Es gilt* $f = -\tilde{f}$ *auf dem Intervall* $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ *und* $f = \tilde{f}$ *auf dessen Komplement. Da* $\tilde{f}$ *auf* $]-\infty, 1[$ *streng monoton fallend und auf* $]1, +\infty[$ *streng monoton wachsend ist, besitzt das quadratische Polynom* $\tilde{f}$ *genau ein Extremum, nämlich das Minimum in* $x = 1$, *wo* f *daher ein lokales Maximum besitzt. Und außerhalb der drei gefundenen Extrema ist* f *streng monoton, weshalb es dort keine lokalen Extrema haben kann.*

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß f in $[a,b]$ ein globales Minimum besitzt.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unterhalbstetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die kein globales Maximum besitzt.

Lösung.

(a) *Ist* f *nach unten nicht beschränkt, so finden wir für jedes* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *einen Wert* $x_k \in [a,b]$ *mit* $f(x_k) \le -k$, *so daß die Folge* $(f(x_k))_{k=1}^\infty$ *uneigentlich gegen* $-\infty$ *konvergiert. Und ist* f *nach unten beschränkt, so wählen wir die Folge* $(x_k)_{k=1}^\infty$ *in* $[a,b]$ *derart, daß*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le f(x_k) \le \inf_{x\in[a,b]} f(x) + \frac{1}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

gilt und daher $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ *ist.*

Da $(x_k)_{k=1}^\infty$ *eine Folge in* $[a,b]$ *ist, ist sie beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge* $(x_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$. *Für* $\bar{x} := \lim_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}$ *gilt dann wegen der Unterhalbstetigkeit von* f:

$$f(\bar{x}) \le \lim_{\ell\to\infty} f(x_{k_\ell}) = \lim_{k\to\infty} f(x_k).$$

Insbesondere kann daher $(f(x_k))_{k=1}^\infty$ *nicht uneigentlich nach* $-\infty$ *konvergieren, weshalb die Funktion* f *nach unten beschränkt sein muß. Damit haben wir also*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le f(\bar{x}) \le \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

weshalb $f(\bar{x}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ *ist und* f *somit an der Stelle* $\bar{x}$ *das globale Minimum hat.*

(b) *Die Funktion*

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x \ne 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

ist stetig auf $[0,1[$ *mit einem Minimum bei* $x = 1$. *Daher ist* f *unterhalbstetig auf* $[0,1]$. *Allerdings hat* f *kein Maximum, da für jedes* $x \in [0,1[$ *die Ungleichung* $f((x+1)/2) > f(x)$ *gilt.*

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 3

Beispiel 1.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, überall positive Funktion mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Zeigen Sie, daß f ein globales Maximum hat.

Lösung.

Da f stetig ist, hat f ein Maximum auf jedem Intervall $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Hätte f nun kein globales Maximum auf $\mathbb{R}$, so müsste für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ existieren mit $|x_n| > n$ und

$$f(x_n) > \max_{-n \le x \le n} f(x) \ge f(0) > 0.$$

Mit anderen Worten hätten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|x_n| \to \infty$, für welche $f(x_n)$ aber nicht gegen 0 konvergiert, was im Widerspruch zur Annahme steht. Somit muss f ein globales Maximum auf $\mathbb{R}$ haben.

Beispiel 2.

Es bezeichne $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z(x) := |x - 2\lfloor \frac{1}{2}(x+1)\rfloor|$, die in den Lösungen von Übungsblatt 2 verwendete Zick-Zack-Funktion. Bestimmen Sie, ob die Gleichungen

(a) $x^{1001} + \frac{1}{1+x^2+z(x)} = 42$ und

(b) $z(x) = x - 1$

Lösungen $x \in \mathbb{R}$ besitzen.

Lösung.

(a) *Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{1001} + \frac{1}{1+x^2+z(x)}$. Sie ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Es gilt $f(0) = 1 < 42$ und $f(2) > 2^{1001} > 42$. Somit muss laut Zwischenwertsatz ein $x \in \,]0, 2[$ existieren mit $f(x) = 42$.*

(b) *Wie oben definieren wir die stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = z(x) - x$. Wegen $g(1) = 0$ und $g(2) = -2$, existiert ein $x \in \,]0, 2[$ mit $g(x) = -1$.*

Beispiel 3.

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes: Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a, b] \to [a, b]$, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei entweder $g(a) = a$ und $g(b) = b$ oder $g(a) = b$ und $g(b) = a$ gelte. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = g(x)$.

Lösung.

Wir betrachten die Funktion

$$h\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x) - g(x).$$

Sei zunächst $g(a) = a$ und $g(b) = b$. Da $a \le f(x) \le b$ für alle $x \in [a, b]$ ist, gilt

$$h(a) = f(a) - a \ge 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - b \le 0.$$

Nun garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in [a, b]$ mit $h(x) = 0$, also $f(x) = g(x)$.

Ist andererseits $g(a) = b$ und $g(b) = a$, so folgern wir umgekehrt, dass

$$h(a) = f(a) - b \le 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - a \ge 0.$$

Wiederum liefert der Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in [a, b]$ mit $f(x) = g(x)$.

Beispiel 4.

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen auf $\mathbb{R}$. Welche der Funktionen $f + g$, fg und $g \circ f$ sind monoton wachsend?

Lösung.

Im Folgenden seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen mit $x < y$. Laut Annahme gilt, dass $f(x) \leq f(y)$ und $g(x) \leq g(y)$ ist.

Die Gültigkeit von $f(x)+g(x) \leq f(y)+g(y)$ folgt unmittelbar aus den beiden Ungleichungen für f und g. Also ist $f+g$ monoton wachsend.

Dass fg im Allgemeinen nicht monoton wachsend ist, kann mit einem Gegenbeispiel gezeigt werden, zum Beispiel $f(x) = x$ und $g(x) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Setzen wir $u = f(x)$ und $v = f(y)$, dann gilt $u \leq v$ wegen der Monotonie von f und folglich $g(u) \leq g(v)$ wegen der Monotonie von g.

Beispiel 5.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, daß eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist.

Lösung.

‚$\Rightarrow$‘: Sei f injektiv. Angenommen $x, y \in I$ seien zwei Punkte mit den Eigenschaften $x < y$ und $f(x) < f(y)$.

(i) Dann gilt für jeden Punkt $z \in]y, +\infty[$, daß $f(z) > f(y)$ ist, da sonst entweder $f(z) = f(y)$ wäre oder wir nach dem Zwischenwertsatz für einen beliebigen Wert $a \in]\max\{f(x), f(z)\}, f(y)[$ Werte $\xi_1 \in]x, y[$ und $\xi_2 \in]y, z[$ mit $f(\xi_1) = a = f(\xi_2)$ hätten, was beides der Injektivität von f widerspräche.

(ii) Ebenso gilt für jedes $z \in]-\infty, x[\cap I$, daß $f(z) < f(x)$ gelten muß, da sonst wiederum entweder $f(z) = f(x)$ wäre oder wir nach dem Zwischenwertsatz für einen beliebigen Wert $a \in]f(x), \min\{f(y), f(z)\}[$ Werte $\xi_1 \in]z, x[$ und $\xi_2 \in]x, y[$ mit $f(\xi_1) = a = f(\xi_2)$ hätten, was beides der Injektivität von f widerspräche.

(iii) Analog folgt für jeden Punkt $z \in]x, y[$, daß $f(x) < f(z) < f(y)$ gelten muß, da falls $f(x) < f(z)$ ist, aus Punkt (i) (bezüglich dem Punktepaar x und z) direkt $f(y) > f(z)$ folgt, und falls $f(z) < f(y)$ ist, aus Punkt (ii) (bezüglich dem Punktepaar z und y) sofort $f(x) < f(z)$ folgt.

Gibt es daher zwei Punkte $x, y \in I$ mit $x < y$ und $f(x) < f(y)$, so folgt für beliebige zwei Punkte $v, w \in I$ mit $v < w$

- *im Fall $w < y$, daß wegen Punkt (ii) oder Punkt (iii) (bezüglich dem Punktepaar x und y) $f(w) < f(y)$ und daher wegen Punkt (ii) (bezüglich dem Punktepaar w und y) $f(v) < f(w) < f(y)$ gelten muß;*
- *im Fall $x < w$, daß wegen Punkt (i) oder (iii) (bezüglich dem Punktepaar x und y) $f(x) < f(w)$ und daher wegen Punkt (ii) oder Punkt (iii) (bezüglich dem Punktepaar x und w) $f(v) < f(w)$ gelten muß.*

Somit ist f streng monoton wachsend.

Gibt es keine Punkte $x, y \in I$ mit $x < y$ und $f(x) < f(y)$, so gilt (wegen der Injektivität) für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ stets $f(x) > f(y)$, womit die Funktion streng monoton fallend ist.

‚$\Leftarrow$‘: Ist f streng monoton, so gilt entweder $f(x) < f(y)$ oder $f(y) < f(x)$ für alle Punkte $x, y \in I$ mit $x < y$. Insbesondere ist daher $f(x) \neq f(y)$ für alle $x, y \in I$ mit $x \neq y$, womit die Funktion f injektiv ist.

Beispiel 6.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{ax+b}{cx+d}.$$

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{R}$, auf der f wohldefiniert ist, sowie das Bild $f(\mathbb{R})$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse $f^{-1}\colon f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) *Um die Menge D zu bestimmen, unterscheiden wir drei Fälle*

$$D = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } c = d = 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } c = 0,\ d \neq 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen also in weiterer Folge an, dass nicht sowohl c und d gleich 0 sind.

Um das Bild $f(\mathbb{R})$ zu bestimmen, untersuchen wir, für welche $y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) = y$ eine Lösung $x \in D$ hat. Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $a = \lambda c$ und $b = \lambda d$, so folgt $\lambda = y = f(x)$ für alle x. (Man beachte, dass die Existenz eines derartigen λ äquivalent ist zu $ad = bc$.) Andernfalls lässt sich $f(x) = y$ umschreiben zu

$$x(a - cy) = dy - b.$$

Ist $c = 0$, dann muss $a \neq 0$ gelten und wir können nach x auflösen. Ist $c \neq 0$, so lässt sich nach x auflösen, falls $y \neq \frac{a}{c}$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$f(\mathbb{R}) = \begin{cases} \lambda, & ad = bc, \\ \mathbb{R}, & ad \neq bc \text{ und } c = 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}, & ad \neq bc \text{ und } c \neq 0. \end{cases}$$

(b) *Um f auf Injektivität zu untersuchen, betrachten wir die Gleichung $f(x) = f(\tilde{x})$ und erhalten nach Umformung*

$$(ad - bc)x = (ad - bc)\tilde{x}.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, falls $ad - bc = 0$ oder $x = \tilde{x}$. Also ist f genau dann injektiv, wenn $ad - bc \neq 0$. In diesem Fall ist die Inverse gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \frac{dy - b}{a - cy}.$$

Beispiel 7.

Bestimmen Sie, auf welcher Teilmenge des Definitionsgebiets die Funktionenfolge

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$,

(b) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n \colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $g_n(x) := \frac{nx}{nx+1}$, beziehungsweise

(c) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $h_n(x) := \frac{1}{n}(1 - (x - a_n)^2)$,

punktweise konvergiert und ob sie auf dieser Menge auch gleichmäßig konvergiert. Dabei bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $[0,1]$.

Lösung.

(a) *Wir haben*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1, \\ +\infty & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

und für $x \leq -1$ konvergiert die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht einmal uneigentlich. Somit konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $]-1,1]$ gegen die Funktion $\mathbf{1}_{\{1\}}$. Da $\mathbf{1}_{\{1\}}$ eine unstetige Funktion ist, kann die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit auf $]-1,1]$ nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) *Für alle $x \in]0,1[$ haben wir*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x + \frac{1}{n}} = 1.$$

Also konvergiert die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf ganz $]0,1[$ gegen die konstante Funktion $1\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$.

Da sich die Funktion g_n stetig zur Funktion $\tilde{g}_n\colon [0,1[\to \mathbb{R}$, $\tilde{g}_n(x) := \frac{nx}{nx+1}$, fortsetzen läßt und wegen $\tilde{g}_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \text{ für alle } x \in [0,1[$$

gilt, $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also punktweise gegen die unstetige Funktion $\mathbf{1}_{]0,1[}\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ konvergiert, kann sie nicht gleichmäßig konvergieren. Das heißt, die Folge

$$\left(\sup_{x\in[0,1[} |\tilde{g}_n(x) - \mathbf{1}_{]0,1[}(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sup_{x\in]0,1[} |g_n(x) - 1|\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert nicht gegen null, weshalb $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen 1 konvergiert.

Wir können dies auch explizit verifizieren:

$$\sup_{x\in]0,1[} |g_n(x) - 1| \geq |g_n(\tfrac{1}{n}) - 1| = \frac{1}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(c) *Wir haben*

$$\max_{x\in[0,1]} h_n(x) = h_n(a_n) = \frac{1}{n} \text{ und } \min_{x\in[0,1]} h_n(x) = \frac{1}{n}(1 - \max\{a_n^2, (1-a_n)^2\}) \geq 0.$$

Also bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

weshalb die Folge auf $[0,1]$ gleichmäßig (und damit auch punktweise) gegen die Nullfunktion konvergiert.

Beispiel 8.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

stetig ist.

Lösung.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$f_N\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f_N(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.

1. Variante: *Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ ein beliebiger Punkt. Wir definieren nun $n_0 := \lfloor|\Re\mathrm{e}(z_0)|\rfloor + 1$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\Re\mathrm{e}(z)| \leq n_0$ und alle $n \in [n_0+1, +\infty[_{\mathbb{N}}$, daß*

$$|z^2 - n^2| = |z-n|\,|z+n| \geq |\Re\mathrm{e}(z-n)|\,|\Re\mathrm{e}(z+n)| \geq (n - |\Re\mathrm{e}(z)|)^2 \geq (n-n_0)^2$$

ist.

Bezeichnen wir nun mit $R := \min\{|z_0 - n| \mid n \in [-n_0, n_0]_{\mathbb{N}}\}$ den kleinsten Abstand von z_0 zu den Punkten in $[-n_0, n_0]_{\mathbb{N}}$ und betrachten die Menge

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \tfrac{1}{2}R,\ |\Re\mathrm{e}(z)| \leq n_0\},$$

so haben wir für alle $z \in A$ und alle $n \in [0, n_0]_{\mathbb{N}}$, daß

$$|z^2 - n^2| = |z - n|\,|z + n| \geq (|z_0 - n| - |z - z_0|)(|z_0 + n| - |z - z_0|) \geq \frac{R^2}{4}$$

ist.

Setzen wir daher

$$a_n := \begin{cases} \frac{2|z_0|+R}{(n-n_0)^2} & \textit{für } n \in [n_0 + 1, +\infty[_{\mathbb{N}}, \\ \frac{4}{R^2}(2|z_0| + R) & \textit{für } n \in [1, n_0]_{\mathbb{N}}, \end{cases} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

so ist die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Majorante für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in A} \left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right|,$$

weshalb f_N auf A gleichmäßig gegen f konvergiert, womit insbesondere gezeigt ist, daß f stetig in z_0 und damit auf ganz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist.

2. Variante: *Betrachten wir die Differenz*

$$|f_N(z) - f(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq 2|z| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|z^2 - n^2|},$$

so können wir diese für beliebig gewähltes $R > 0$ gleichmäßig für alle $z \in \mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z}$ abschätzen, sobald $N > R$ ist. Dazu bemerken wir, daß

$$\begin{aligned} |z^2 - n^2| &\geq n^2 - |z|^2 \geq n^2 - R^2 \geq n^2 \left(1 - \frac{R^2}{(N+1)^2}\right) \\ &\geq n^2 \left(1 - \frac{R^2}{(R+1)^2}\right) = \frac{2R+1}{(R+1)^2} n^2 \ \textit{für alle } z \in \mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z} \textit{ und } n \in [N+1, \infty[_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

gilt. Daher haben wir

$$\sup_{z \in \mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z}} |f_N(z) - f(z)| \leq 2R \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - R^2} \leq \frac{2R(R+1)^2}{2R+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to 0 \ (N \to \infty)$$

wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Somit konvergiert $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ auf jedem Ball $\mathrm{B}_R(0) \setminus \mathbb{Z}$, $R > 0$, gleichmäßig gegen f, weshalb f in jedem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ stetig ist.

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 4

Beispiel 1.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ eine stetige Funktion mit

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$

$$f(ny) = \big(f(y)\big)^n$$

gelten muß.

(b) Folgern Sie, daß wir damit für jedes $y \in \mathbb{R}$ und jedes $r \in \mathbb{Q}$

$$f(ry) = \big(f(y)\big)^r$$

haben.

(c) Schließen Sie dann, daß jede Lösung f die Form

$$f(x) = a^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

für ein $a \in]0,+\infty[$ hat.

Lösung.

(a) *Als erstes bemerken wir, daß wegen*

$$f(0) = f(0+0) = (f(0))^2$$

$f(0) = 1$ *ist.*

Mit vollständiger Induktion bekommen wir, daß für beliebiges $y \in \mathbb{R}$

$$f(ny) = \big(f(y)\big)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

gilt: Die Induktionsverankerung ist durch $f(0) = 1$ *gegeben und haben wir* $f(ny) = (f(y))^n$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$*, so folgt direkt*

$$f((n+1)y) = f(ny+y) = f(ny)f(y) = \big(f(y)\big)^n f(y) = \big(f(y)\big)^{n+1}.$$

Zudem folgt aus

$$1 = f(0) = f(y-y) = f(y)f(-y),$$

daß $f(-y) = (f(y))^{-1}$ *ist. Gilt* $f(-ny) = (f(y))^{-n}$ *für ein* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, so folgt außerdem*

$$f(-(n+1)y) = f(-ny-y) = f(-ny)f(-y) = (f(y))^{-n}(f(y))^{-1} = (f(y))^{-n-1},$$

was mit vollständiger Induktion die Behauptung liefert.

(b) *Aus*

$$f(y) = f(n\tfrac{y}{n}) = (f(\tfrac{y}{n}))^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ y \in \mathbb{R}$$

ergibt sich weiters $f(\frac{y}{n}) = (f(y))^{\frac{1}{n}}$*, womit wir für jedes* $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *mit* $m \in \mathbb{Z}$ *und* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f(ry) = f(\tfrac{m}{n}y) = f(m\tfrac{y}{n}) = (f(\tfrac{y}{n}))^m = \big((f(y))^{\frac{1}{n}}\big)^m = (f(y))^r$$

bekommen.

(c) *Mit $a := f(1)$ haben wir daher (für $y = 1$)*

$$f(r) = a^r \text{ für alle } r \in \mathbb{Q}.$$

Da die Funktion $x \mapsto a^x$ stetig ist, bekommen wir damit für jedes $x \in \mathbb{R}$, indem wir eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ betrachten, daß

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$$

gilt.

Beispiel 2.

Wir betrachten die Sinusfunktion

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

und die Cosinusfunktion

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(a) Zeigen Sie, daß wir für alle $x \in [0, 5]$ die Abschätzungen

$$x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin(x) \le x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \text{ und}$$
$$1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos(x) \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

haben.

(b) Folgern Sie, daß die Cosinusfunktion eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Wir definieren die Kreiszahl π dadurch, daß diese Nullstelle gerade $\frac{\pi}{2}$ sei.

Lösung.

(a) *Wir betrachten für $x \in [0, 5]$ die Reihen*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ und } \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Wegen

$$\frac{\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} \le \frac{25}{42} < 1 \text{ für alle } k \in [2, \infty]_{\mathbb{N}} \text{ und}$$
$$\frac{\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{x^{2k}}{(2k)!}} = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \le \frac{25}{30} < 1 \text{ für alle } k \in [2, \infty]_{\mathbb{N}},$$

sind beides alternierende Reihen, deren Summanden im Betrag monoton fallenden Nullfolgen sind. Daher liegen die Grenzwerte der Reihe zwischen 0 und dem ersten Summanden:

$$0 \le \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \le \frac{x^5}{5!} \text{ und } 0 \le \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \frac{x^4}{4!},$$

was uns die Behauptung liefert.

(b) *Wir haben $\cos(0) = 1 > 0$ und nach Teil (a)*

$$\cos(2) \le 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{24} \cdot 2^4 = -\frac{1}{3} < 0,$$

weshalb die stetige Cosinusfunktion eine Nullstelle im Intervall $]0,2[$ *besitzen muß.*

Betrachten wir nun die Menge $N := \{x \in]0,2[\mid \cos(x) = 0\}$ *aller Nullstellen in diesem Intervall, so ist die Menge nicht leer, weshalb* $\inf N \in [0,2[$ *ist. Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* N*, die gegen* $\inf N$ *konvergiert, so gilt wegen der Stetigkeit des Cosinus, daß* $\cos(\inf N) = \lim_{n\to\infty}\cos(x_n) = 0$ *und somit* $\inf N \in N$ *ist. Da das Infimum wegen* $\cos(0) = 1$ *nicht in* 0 *liegen kann, ist damit* $\inf N$ *die kleinste positive Nullstelle vom Cosinus.*

Beispiel 3.

Schließen Sie aus Beispiel 2, daß

(a) $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(b) $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ und

(c) sin und cos periodische Funktionen mit der Periode 2π sind (was bedeutet, daß $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).

Lösung.

(a) *Nach Definition der Sinus- und Cosinusfunktion haben wir*

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = |\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)|^2 = |\exp(\mathrm{i}x)|^2.$$

Nach dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion und der aus der Reihendarstellung für alle $z \in \mathbb{C}$ *folgenden Identität* $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ *gilt dann jedoch*

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = |\exp(\mathrm{i}x)|^2 = \overline{\exp(\mathrm{i}x)}\exp(\mathrm{i}x) = \exp(\mathrm{i}(x-x)) = \exp(0) = 1.$$

Somit ist $\sin(\frac{\pi}{2}) \in \{-1,1\}$ *und es genügt zu zeigen, daß* $\sin(\frac{\pi}{2}) > -1$ *ist, was sofort aus unserer Abschätzung in Beispiel 2, Teil (a), folgt:*

$$\sin(x) \geq x - \tfrac{1}{6}x^3 = x(1 - \tfrac{1}{\sqrt{6}}x)(1 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}x) \geq 0 \textit{ für alle } x \in]0,\sqrt{6}[\supset]0,2[.$$

(b) *Wir haben also an der Stelle* $\frac{\pi}{2}$*:*

$$\exp(\tfrac{\pi}{2}\mathrm{i}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{i}.$$

Gemäß dem Additionstheorem gilt daher

$$\exp(2\pi\mathrm{i}) = \big(\exp(\tfrac{\pi}{2}\mathrm{i})\big)^4 = \mathrm{i}^4 = 1.$$

(c) *Daraus folgt weiters für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+2\pi) + \mathrm{i}\sin(x+2\pi) = \exp(\mathrm{i}(x+2\pi)) = \exp(\mathrm{i}x)\exp(2\pi\mathrm{i}) = \exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x),$$

weshalb

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \textit{ und } \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

gilt.

Beispiel 4.

Beweisen Sie, daß die Funktion

$$f\colon]-\pi,\pi] \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\},\ f(\varphi) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

für jedes $R > 0$ bijektiv ist.

Lösung.

Wir zeigen zuerst, daß die Funktion surjektiv ist. Sei dazu $z = x + \mathrm{i}y$ *ein beliebiger Punkt mit* $|z|^2 = x^2 + y^2 = R^2$*. Da* cos *eine stetige Funktion mit* $\cos(0) = 1$ *und* $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ *ist, finden wir ein* $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$

mit $\cos(\varphi) = \frac{1}{R}|x|$. *Wegen* $\cos^2(\xi) + \sin^2(\xi) = 1$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}$ *bekommen wir zusammen mit* $\sin(\xi) \geq 0$ *für alle* $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *damit auch* $\sin(\varphi) = \frac{1}{R}|y|$. *Um das Vorzeichen richtig zu bekommen, bemerken wir, daß*

$$\cos(-\xi) = \cos(\xi) \ \textit{und} \ \sin(-\xi) = -\sin(\xi)$$

sowie

$$\cos(\xi - \pi) + \mathrm{i}\sin(\xi - \pi) = \exp(\mathrm{i}\xi)\exp(-\mathrm{i}\pi) = (-\mathrm{i})^2 \exp(\mathrm{i}\xi) = -\cos(\xi) - \mathrm{i}\sin(\xi)$$

gilt. Wir definieren daher

$$\psi := \begin{cases} \varphi & \textit{für } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ \varphi - \pi & \textit{für } x < 0, y < 0, \\ -\varphi & \textit{für } x \geq 0, y < 0, \\ \pi - \varphi & \textit{für } x < 0, y \geq 0, \end{cases}$$

was uns $\cos(\psi) = x$ *und* $\sin(\psi) = y$ *liefert.*

Um die Injektivität zu beweisen, seien $\varphi, \phi \in\,]-\pi, \pi]$ *mit* $f(\varphi) = f(\phi)$. *Dann ist*

$$1 = \exp(\mathrm{i}(\varphi - \phi)), \ \textit{also}\ \mathrm{i} = \exp(\mathrm{i}(\varphi - \phi + \frac{\pi}{2})) = \cos(\varphi - \phi + \tfrac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\varphi - \phi + \tfrac{\pi}{2}).$$

Somit ist $\varphi - \phi + \frac{\pi}{2}$ *eine Nullstelle des Cosinus. Da aber* $\frac{\pi}{2}$ *die kleinste Nullstelle des Cosinus ist, also im Intervall* $[0, \frac{\pi}{2}[$ *keine Nullstelle existiert, liegt wegen* $\cos(\xi - \pi) = -\cos(\xi)$ *in* $[-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ *ebenfalls keine Nullstelle. Und wegen* $\cos(-\xi) = \cos(\xi)$ *sind daher* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{\pi}{2}$ *die einzigen Nullstellen in* $[-\pi, \pi]$. *Wegen der Periodizität mit Periode* 2π *muß daher ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit*

$$\varphi - \phi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \textit{also}\ \varphi = \phi + \pi k$$

existieren. Wegen $\varphi, \phi \in\,]-\pi, \pi]$ *kommt damit nur* $\varphi = \phi$ *oder* $|\varphi - \phi| = \pi$ *in Frage. Da an der Stelle* $\varphi - \phi + \frac{\pi}{2}$ *allerdings zudem der Sinus 1 sein muß, ist der zweite Fall wegen*

$$\sin(\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(-\pi + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

ausgeschlossen, womit wir die Injektivität gezeigt haben.

Beispiel 5.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Differenzierbarkeit ist „stärker“ als Stetigkeit: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f in x auch stetig.

(b) Ableiten ist eine lineare Operation: Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Linearkombination $af + bg$ bei x differenzierbar und es gilt

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Lösung.

(a) *Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Grenzwert* $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *existiert, berechnen wir direkt*

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x} f(y) &= f(x) + \lim_{y\to x}(f(y) - f(x)) = f(x) + \lim_{y\to x}(y - x)\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= f(x) + \lim_{y\to x}(y - x) \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f(x) + 0 \cdot f'(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(b) *Die Rechenregeln für Grenzwerte liefern direkt, dass*

$$\begin{aligned} af'(x) + bg'(x) &= a \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + b \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} \left(a\frac{f(y)-f(x)}{y-x} + b\frac{g(y)-g(x)}{y-x} \right) \\ &= \lim_{y\to x} \frac{(af+bg)(y)-(af+bg)(x)}{y-x} \\ &= (af+bg)'(x). \end{aligned}$$

Beispiel 6.

Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$,

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$,

(c) $f_3 \colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$

durch direkte Auswertung des Grenzwerts

$$\lim_{y\to x} \frac{f_i(y)-f_i(x)}{y-x}.$$

Lösung.

(a) *Definieren wir die Potenzfunktion $g_k(x) := x^k$, so wissen wir aus Beispiel 5.(b), dass $f_1'(x) = \sum_{k=0}^n a_k g_k'(x)$ gilt. Also berechnen wir gliedweise*

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j h^{k-j} - x^k \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j h^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \lim_{h\to 0} h^{k-j-1} = kx^{k-1}. \end{aligned}$$

(b) *Direktes Einsetzen liefert uns:*

$$f_2'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

(c) *Multiplikation des Differenzenquotienten mit $\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ liefert*

$$f_3'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Beispiel 7.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) := x^2 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind.

Lösung.

(a) *Der Grenzwert*

$$f_1'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h}$$

existiert nicht. Also ist f_1 bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

(b) *Wegen der Beschränktheit der Sinusfunktion gilt jedoch*

$$f_2'(0) = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

(c) *Analog haben wir*

$$f_3'(0) = \lim_{h \to 0} h \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(h) = 0.$$

Beispiel 8.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, nur anhand der Definition der Ableitung, daß

(a) die Ableitung einer geraden Funktion ungerade, und

(b) die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist.

Lösung.

(a) *Da f gerade ist, erhalten wir*

$$-f'(-x) = -\lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}.$$

Dieser Grenzwert ist unabhängig von der betrachteten Nullfolge. Da $h \to 0$ äquivalent zu $-h \to 0$ ist, können wir $-h$ durch h ersetzen. Somit ergibt sich

$$-f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

(b) *Auf ähnliche Weise erhalten wir*

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x).$$

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 5

Beispiel 1.

Bestimmen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die Konvergenzradien der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} z^{2k+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} z^{2k+1}$,

wobei die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, durch die Rekursion

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha - k}{k+1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

mit dem Anfangswert $\binom{\alpha}{0} = 1$ definiert sind.

Lösung.

(a) *Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so ist $\binom{\alpha}{k} = 0$ für alle $k > \alpha$, weshalb wir eine endliche Summe und damit einen unendlichen Konvergenzradius haben.*

Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, so ist $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und wegen

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} z^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} z^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha - k|}{k+1} |z| = |z|$$

konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium für $z \in \mathrm{B}_1(0)$ absolut und divergiert für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathrm{B}}_1(0)$. Somit ist der Konvergenzradius gerade 1.

(b) *Mit*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{2k+1} z^{2k+1} \right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{\frac{1}{k}}}{(2k+1)^{\frac{1}{k}}} |z|^2 = |z|^2,$$

bekommen wir aus dem Wurzelkriterium, daß die Reihe für $z \in \mathrm{B}_1(0)$ absolut konvergiert und für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_1(0)$ divergiert. Der Konvergenzradius ist daher ebenfalls 1.

(c) *Aus*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2(2k+3)} z^{2k+3}}{\frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} z^{2k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)^2(2k+2)}{(k+1)^2(2k+3)} |z|^2 = 4|z|^2$$

folgt mit dem Quotientenkriterium, daß die Reihe für $4|z|^2 < 1$, also $z \in \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}(0)$, absolut konvergiert und für $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_{\frac{1}{2}}(0)$ divergert, weshalb der Konvergenzradius gerade $\frac{1}{2}$ ist.

Beispiel 2.

Wir betrachten die rekursiv durch

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit den Anfangswerten $f_0 := 0$ und $f_1 := 1$ definierte Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um eine explizite Darstellung zu bekommen, siehe Beispiel 3.(b), definieren wir zunächst die Potenzreihe

$$F\colon \mathrm{B}_R(0) \to \mathbb{C},\ F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

wobei $R > 0$ so gewählt sei, daß die Reihe auf $\mathrm{B}_R(0)$ konvergiere.

(a) Verifizieren Sie, daß ein Radius $R > 0$ existiert, für den die Funktion F wohldefiniert ist.

(b) Folgern Sie aus der Rekursionsgleichung, daß die Funktion F durch

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_R(0)$$

gegeben ist.

Lösung.

(a) *Wir behaupten, daß die Beziehung $f_n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und beweisen dies mittels vollständiger Induktion. Die Bedingung für $n = 0$ und $n = 1$ ist offenbar erfüllt. Gilt nun $f_k < C^k$ für alle $k \leq n$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so folgt*

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \leq 2^n + 2^{n-1} \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

weshalb $f_k < 2^k$ für alle $k \leq n+1$ und nach vollständiger Induktion somit für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ wegen

$$|f_n z^n| \leq 2^n z^n \leq 2^{-n} \textit{ für alle } z \in \mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)$$

unter anderem auf $\mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)$ und ist somit für $R := \frac{1}{4}$ wohldefiniert.

(b) *Gemäß der Rekursionsgleichung gilt für alle $z \in \mathrm{B}_R(0)$ die Beziehung*

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f_0 + f_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{n+2} = z + z\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \\ &= z + (z + z^2)F(z), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Beispiel 3.

(a) Schreiben Sie die Funktion F aus Beispiel 2.(b) in der Form

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$

mit geeigneten Konstanten $A, B, a, b \in \mathbb{C}$ und bestimmen Sie damit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und einen Radius $r > 0$, für die

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0)$$

gilt.

(b) Beweisen Sie, daß die in Beispiel 2 definierten Fibonacci-Zahlen durch

$$f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\Big((1+\sqrt{5})^n - (-1)^n(\sqrt{5}-1)^n\Big) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegeben sind.

Lösung.

(a) *Seien a und b die Nullstellen der Polynomfunktion $z \mapsto 1-z-z^2$, so daß wir $z^2+z-1=(z-a)(z-b)$ haben. Wir schreiben dann*

$$\frac{z}{1-z-z^2} = -\frac{z}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{a}{z-a} - \frac{b}{z-b}\right)$$

und bekommen mit der Formel

$$\frac{c}{z-c} = -\frac{1}{1-\frac{z}{c}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{c}\right)^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_c(0)$$

für die geometrische Reihe, daß mit $r := \min\{|a|,|b|\}$

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n}\right) z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0)$$

gilt.

(b) *Bestimmen wir die Nullstellen a und b explizit, so finden wir, wenn wir uns willkürlich für $a < b$ entscheiden,*

$$a = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \text{ und } b = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Damit erhalten wir also $r = b$ und

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{(\sqrt{5}-1)^n} - \frac{2^n}{(-1-\sqrt{5})^n}\right) z^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^n} - (-1)^n\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^n}\right) z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0). \end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathrm{B}_{\min\{R,r\}}(0)$ gilt somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^n} - (-1)^n\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^n}\right) z^n,$$

woraus aus dem Identitätssatz die Behauptung folgt.

Beispiel 4.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) \le af(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} &f(x) \ge \mathrm{e}^{ax} f(0) \text{ für alle } x \in \left]-\infty, 0\right] \text{ und} \\ &f(x) \le \mathrm{e}^{ax} f(0) \text{ für alle } x \in \left[0, +\infty\right[\end{aligned}$$

gilt.

Lösung.

Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := f(x)\mathrm{e}^{-ax}.$$

Wegen der Differenzierbarkeit von g und der Exponentialfunktion ist g ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-ax} - af(x)\mathrm{e}^{-ax} \le 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist g monoton fallend und es gilt daher für alle $x \in [0, +\infty[$

$$f(x)\mathrm{e}^{-ax} = g(x) \leq g(0) = f(0), \text{ also } f(x) \leq f(0)\mathrm{e}^{-ax}.$$

Ebenso folgt für alle $x \in]-\infty, 0]$, daß

$$f(x)\mathrm{e}^{-ax} = g(x) \geq g(0) = f(0), \text{ also } f(x) \geq f(0)\mathrm{e}^{-ax}$$

ist.

Beispiel 5.

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und n-mal differenzierbar auf $]a,b[$. Beweisen Sie, daß die n-te Ableitung $f^{(n)}\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Nullstelle besitzt, falls f selbst $n+1$ Nullstellen hat.

(b) Nutzen Sie Punkt (a) um die folgende Aussage zu beweisen:

Seien $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ in $[a,b]$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion und $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad höchstens N, welches $g(x_i) = p(x_i)$ für alle $i = 0, \ldots, N$ erfüllt. Dann gibt es für jedes $x \in [a,b]$ ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$g(x) - p(x) = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x),$$

wobei $q(x) := \prod_{i=0}^{N} (x - x_i)$ sei.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$h(t) := q(x)(g(t) - p(t)) - q(t)(g(x) - p(x))$$

und zeigen Sie, daß sie $N+2$ Nullstellen hat.

Lösung.

(a) *Sei f eine n-mal differenzierbare Funktion mit $n+1$ Nullstellen. Wir behaupten etwas allgemeiner, daß dann $f^{(k)}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ zumindest $n+1-k$ Nullstellen besitzt. Wir beweisen die Aussage mit Induktion: Für $k = 0$ entspricht die Aussage gerade der Voraussetzung. Hat $f^{(k)}$ für $k < n$ zumindest $n+1-k$ Nullstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-k}$, so existiert in jedem der $n-k$ Intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, $j \in \{0, \ldots, n-k-1\}$, nach dem Satz von Rolle ein Punkt ξ_j mit $f^{(k+1)}(\xi_j) = 0$. Somit besitzt $f^{(k+1)}$ zumindest die $n-k$ Nullstellen ξ_j, $j \in \{0, \ldots, n-k-1\}$.*

(b) *Wir betrachten die im Hinweis vorgeschlagene, $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion h, die wegen $q(x_i) = 0$ und $g(x_i) = p(x_i)$*

$$h(x_i) = q(x)(g(x_i) - p(x_i)) - q(x_i)(g(x) - p(x)) = 0 \text{ für alle } i \in \{0, \ldots, N\}$$

erfüllt. Außerdem gilt

$$h(x) = q(x)(g(x) - p(x)) - q(x)(g(x) - p(x)) = 0.$$

- *Ist $x \notin \{x_i \mid i \in \{0, \ldots, N\}\}$, so hat die Funktion h daher $N+2$ Nullstellen. Nach Teil (a) hat daher die Funktion $h^{(N+1)}$ eine Nullstelle ξ. Um die $(N+1)$-te Ableitung von h zu berechen, bemerken wir, daß die $(N+1)$-te Ableitung einer Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich N gleich null ist, so daß $p^{(N+1)} = 0$ ist. Außerdem ist $q(x) = x^{N+1} + \tilde{q}(x)$ mit einer Polynomfunktion $\tilde{q}$ mit Grad kleiner gleich N, so daß wir $q^{(N+1)}(x) = (N+1)!$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit bekommen wir*

$$\begin{aligned} h^{(N+1)}(t) &= q(x)(g^{(N+1)}(t) - p^{(N+1)}(t)) - q^{(N+1)}(t)(g(x) - p(x)) \\ &= q(x)g^{(N+1)}(t) - (N+1)!(g(x) - p(x)), \end{aligned}$$

also haben wir an der Nullstelle ξ:

$$g(x) - p(x) = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x).$$

- *Es bleibt der Fall, daß $x \in \{x_i \mid i \in \{0, \ldots, N\}\}$ ist. In dem Fall ist*

  $$g(x) - p(x) = 0 = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x)$$

  für eine beliebige Wahl von ξ.

Beispiel 6.

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\big(\tan(x)\big)^2}$,

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x \tan(x))$.

Lösung.

(a) *Mit dem Satz von de L'Hospital bekommen wir*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\big(\tan(x)\big)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2\tan(x)(1 + \tan^2(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{2(1 + \tan^2(x))} = -\frac{1}{2}.$$

(b) *Wir nehmen den Logarithmus des Ausdrucks und bekommen mit der Stetigkeit des Logarithmus*

$$\log\left(\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n \to \infty} n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

Wir definieren nun die Funktion

$$g_x \colon]x, +\infty[\to \mathbb{R}, \; g(y) := y \log\left(1 - \frac{x}{y}\right).$$

Verwenden wir den Satz von de L'Hospital, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{y \to +\infty} g_x(y) &= \lim_{y \to +\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{x}{y}\right)}{\frac{1}{y}} \\ &= \lim_{y \to +\infty} \frac{-\frac{x}{y^2} \frac{1}{1 - \frac{x}{y}}}{-\frac{1}{y^2}} = -x \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{y}} = -x. \end{aligned}$$

Insbesondere bekommen wir also

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n \to \infty} g_x(n)\right) = \exp\left(\lim_{y \to +\infty} g_x(y)\right) = \mathrm{e}^{-x}.$$

(c) *Wir schreiben den Grenzwert in der Form*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x \tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin(2x \tan(x))}{\cos(2x \tan(x))}$$

und verwenden wiederum den Satz von de L'Hospital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x \tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(h(x)) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos(h(x)) h'(x)}{-\sin(h(x)) h'(x)} = -\frac{1}{h'(\frac{\pi}{4})},$$

wobei wir als Abkürzung die stetig differenzierbare Funktion

$$h \colon]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \; h(x) := 2x \tan(x),$$

eingeführt haben, deren Ableitung durch

$$h'(x) = 2\tan(x) + 2x(1 + \tan^2(x))$$

gegeben ist. Somit haben wir

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x \tan(x)) = -\frac{1}{2 + \pi}.$$

Beispiel 7.

Wir betrachten die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Bestimmen Sie

(a) die Extrema,

(b) das Monotonieverhalten,

(c) die maximalen Intervalle, auf welchen f konvex oder konkav ist, sowie

(d) die Grenzwerte $\lim_{x \to -1} f'(x)$ und $\lim_{x \to 1} f'(x)$.

Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung.

Wir berechnen zuerst die ersten und zweiten Ableitungen der Funktion f, die wir in der Form $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ schreiben wollen, und bekommen:

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}},$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}},$$

woraus wir direkt die beiden in Teil (d) gefragten Grenzwerte

$$\lim_{x \downarrow -1} f'(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \uparrow 1} f'(x) = -\infty$$

bekommen.

Um die lokalen Extrema im Inneren zu finden, bestimmen wir die Nullstellen von f', das sind die Punkte $x \in\,]-1,1[$ mit

$$\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}, \text{ also } 3(1-x) = 1+x.$$

Das liefert uns den einzigen kritischen Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$. Da f' stetig ist und keine weitere Nullstelle in dem Intervall $]x_0, 1[$ hat, ist f' auf $]x_0, 1[$ wegen $\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = -\infty$ negativ. Ebenso ist f' auf $]-1, x_0[$ wegen $f'(0) = 1$ positiv. Damit ist f auf $]-1, x_0[$ monoton wachsend und auf $]x_0, 1[$ monoton fallend, was uns das in (b) gesuchte Verhalten beschreibt; und daher besitzt f in x_0 ein lokales Maximum. Außerdem folgt daraus, daß f in -1 und 1 lokale Minima hat.

Da f eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist, muß sie ebenfalls ein globales Maximum und ein globales Minimum haben, wofür nur die drei gefundenen lokalen Extrema in Frage kommen. Daher ist x_0 sogar ein globales Maximum und wegen $f(-1) = 0 = f(1)$ liegen bei beiden Punkten -1 und 1 globale Minima, womit Teil (a) beantwortet ist.

Es bleibt uns die in Teilaufgabe (c) gefragte Konvexität und Konkavität der Funktion. Dazu bestimmen wir die Nullstellen der zweiten Ableitung, also die Punkte x mit

$$\frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ und erhalten die äquivalente Bedingung

$$\frac{3}{4}(1-x)^2 - \frac{3}{2}(1+x)(1-x) - \frac{1}{4}(1+x)^2 = 0.$$

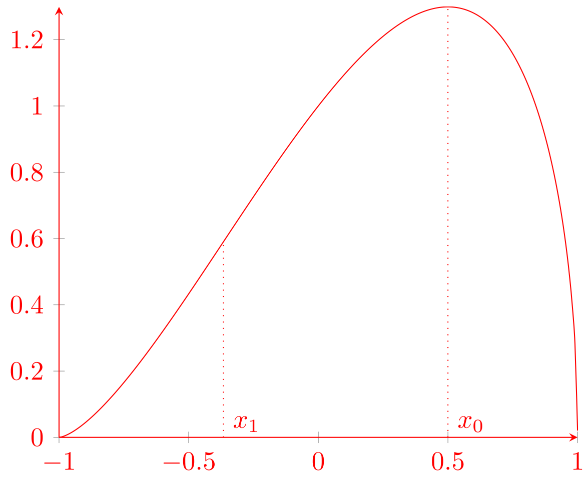
Wir multiplizieren aus und finden die quadratische Gleichung

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

mit den beiden Lösungen $x_1 := \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \in \left]-1,1\right[$ *und* $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \notin [-1,1]$. *Wegen*

$$\lim_{x \downarrow -1} f''(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x \uparrow 1} f''(x) = -\infty$$

ist daher f'' *positiv auf* $\left]-1,x_1\right[$ *und negativ auf* $\left]x_1,1\right[$. *Daher ist* f *auf* $[-1,x_1]$ *konvex und auf* $[x_1,1]$ *konkav.*



Beispiel 8.

(a) Berechnen Sie $\int e^x \cos(x)\,dx$.

(b) Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Lösung.

(a) *Sei* F *eine Stammfunktion der Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x \cos(x)$. *Dann gilt nach partieller Integration, daß eine Stammfunktion* G *der Funktion* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x \sin(x)$, *mit*

$$F(x) = e^x \sin(x) - G(x)$$

existiert. Eine partielle Integration von G *liefert uns weiters, daß es eine Stammfunktion* $\tilde{F}$ *von* f *mit*

$$G(x) = -e^x \cos(x) + \tilde{F}(x)$$

gibt. Da F *und* $\tilde{F}$ *Stammfunktionen derselben Funktion sind, finden wir eine Konstante* $C \in \mathbb{R}$ *mit* $\tilde{F} = F - C$. *Kombinieren wir die Gleichungen, so bekommen wir daher schließlich*

$$F(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - F(x) + C, \text{ also } F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C.$$

(b) *Für* $n = 0$ *suchen wir die Stammfunktionen* I_0 *der konstanten Funktion* 1 *auf* $\mathbb{R}$, *was gerade die Funktionen der Form* $I_0(x) = x + C$ *mit einer beliebigen Konstante* $C \in \mathbb{R}$ *sind.*

Sei nun I_n *eine Stammfunktion der Funktion* $h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(x) = (x^2+1)^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Dann bekommen wir mit partieller Integration, daß eine Stammfunktion* J_n *der Funktion* $\tilde{h}_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{h}_n(x) := -2n\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = -2n\frac{1}{(x^2+1)^n} + 2n\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}},$$

mit

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} - J_n(x)$$

existiert. Somit finden wir eine Stammfunktion I_{n+1} *von* h_{n+1} *mit*

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} - 2nI_{n+1}(x) + 2nI_n(x), \ \textit{also}\ I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}I_n(x) + \frac{x}{2n(x^2+1)^n}.$$

Als Startwert dieser Rekursionsformel dient die Stammfunktion I_1 *von* $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = x^2+1$, *die von der Form*

$$I_1(x) = \arctan(x) + C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$ *ist.*

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 6

Beispiel 1.

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^n}\,\mathrm{d}x$ auf $]0,\pi[$ für $n = 2,3,4,5$ und

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^5}\,\mathrm{d}x$ auf $]0,\infty[$.

Lösung.

(a) *Wir verwenden die aus der Vorlesung bekannte Substitution* $t = \tan\frac{x}{2}$. *Dann hat man*

$$\mathrm{d}t = \frac{1+t^2}{2}\,\mathrm{d}x \quad \textit{und} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Folglich betrachten wir

$$\int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^n \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2(1+t^2)^{n-1}}{(2t)^n}\,\mathrm{d}t,$$

und erhalten die Stammfunktionen:

$$n=2\text{:} \int \frac{1+t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t}+\frac{t}{2}+C.$$

$$n=3\text{:} \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+2t^2+t^4}{4t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{t^2}{8}+C.$$

$$n=4\text{:} \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{8t^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{24t^3}-\frac{3}{8t}+\frac{3t}{8}+\frac{t^3}{24}+C.$$

$$n=5\text{:} \int \frac{(1+t^2)^4}{16t^5}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8}{16t^5}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{64t^4}-\frac{1}{8t^2}+\frac{3}{8}\ln|t|+\frac{t^2}{8}+\frac{t^4}{64}+C.$$

Rückeinsetzen von $\tan\frac{x}{2}$ *für* t *liefert die gesuchten Stammfunktionen von* $(\sin x)^{-n}$.

(b) *Da* $x^3+x^5 = x^3(1+x^2)$, *machen wir folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung*

$$\frac{1}{x^3+x^5} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{dx+e}{x^2+1}.$$

Multiplikation mit x^3+x^5 *und Koeffizientenvergleich ergibt*

$$\frac{1}{x^3+x^5} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{x}{x^2+1}.$$

Folglich haben wir die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^3+x^5}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| - \frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, deren n-te Ableitung durch

$$f^{(n)}(x) = \log(x)$$

gegeben ist.

Lösung.

Wir beweisen induktiv, dass

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + p(x) \tag{1}$$

gilt, wobei p ein beliebiges Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Für $n = 1$ gilt die Behauptung. Für den Induktionsschritt berechnen wir die Stammfunktionen der in Gleichung (1) gegebenen Funktion. Wir vernachlässigen p, weil dessen Stammfunktionen bekannt sind. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{x^n}{n!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \int \frac{x^n}{(n+1)!}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\log(x) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right),\end{aligned}$$

was der gewünschte Ausdruck für $n+1$ ist.

Beispiel 3.

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Nützen Sie die in Punkt (a) bewiesene Identität, um das Integral

$$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x$$

für $a > 0$ als Grenzwert von Darboux-Obersummen zu berechnen.

Lösung.

(a) *Für $n = 1$ gilt die Gleichung. Aus der Gültigkeit für ein $n \geq 1$, folgt aber unmittelbar, dass*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3),\end{aligned}$$

was der gewünschte Ausdrück für $n+1$ ist.

(b) *Als Nächstes zerlegen wir das Intervall $[0, a]$ gleichmäßig in n Teilintervalle. Das heißt wir betrachten die Zerlegung $Z_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$, wobei $x_k := k\frac{a}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Da der Integrand monoton wachsend ist, wird das Maximum auf jedem Teilintervall am rechten Intervallrand angenommen. Es gilt also*

$$\overline{S}(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} x_k^2 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Die Obersummen konvergieren für $n \to \infty$ gegen das Riemann-Integral, weil der Integrand stetig ist. Wir erhalten also

$$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

Beispiel 4.

Verwenden Sie das Riemann-Integral, um die folgenden Grenzwerte zu berechnen

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Hinweis für Teil (b): Betrachten Sie den Logarithmus des Ausdrucks.

Lösung.

(a) *Da*

$$\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2},$$

kann man die Summe wie folgt schreiben

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

mit $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ *und den äquidistanten Zerlegungspunkten* $x_k = \frac{k}{n}$, $0 \le k \le n$. *Da* f *monoton fallend ist, hat man*

$$f(x_k) = \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),$$

weshalb die Summe eine Untersumme für $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ *ist. Aufgrund der Stetigkeit von* f *konvergiert diese Summe für* $n \to \infty$ *gegen das Riemann-Integral, das heißt*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) *Wir folgen dem Hinweis und berechnen*

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdots\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)(x_k - x_{k-1}),$$

wobei $x_k := \frac{k}{n}$, $0 \le k \le n$, *und* $g(x) := \ln x$. *Wir erhalten also eine Zwischensumme für das uneigentliche Integral* $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$. *Dieses uneigentliche Integral ist wohldefiniert und gleich* -1. *Dennoch muss die Konvergenz der Zwischensummen gesondert bewiesen werden. Dazu halten wir erstens fest, dass der Logarithmus auf* $[\frac{1}{n}, 1]$ *integrierbar ist und zweitens, dass für jede integrierbare Funktion* f

$$\underline{S}(f,Z) \le \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,Z)$$

gilt. Nun folgt aus der ersten Ungleichung und der Monotonie des Logarithmus, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n} \le \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x$$

ist, während die zweite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{n} \ge \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x$$

liefert. Insgesamt haben wir also

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} \le \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x$$

und der Einschließungssatz ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n} = \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = -1.$$

Für den gesuchten Grenzwert ergibt sich schlussendlich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Beispiel 5.

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ und

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, \mathrm{d}x.$

Lösung.

Die Substitutionsregel für bestimmte Integrale lautet

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t)) g'(t) \, \mathrm{d}t,$$

wobei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton und $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(a) *Wenden wir obige Formel mit $g(t) := \sin t$ an und integrieren danach partiell, so erhalten wir*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

(b) *Diesmal wählen wir $g(t) := t^2$ und integrieren wieder partiell*

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 2t\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = 2\mathrm{e} - \int_0^1 2\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2 = 2.$$

(c) *Wir setzen $g(t) := \frac{\pi}{2} - t$ und erhalten*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, \mathrm{d}x &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nennen wir das erste Integral dieser Gleichungskette A und das letzte B so haben wir einerseits $A = B$ und andererseits

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Daher ist $A = \frac{\pi}{4}$.

Beispiel 6.

Wir betrachten die Funktion

$$F \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie ohne Benutzung des Logarithmus, daß F die Eigenschaften

(a) $F(xy) = F(x) + F(y)$,

(b) $F(x^\alpha) = \alpha F(x)$ und

(c) $F(\mathrm{e}^x) = x$

für alle $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ hat.

Lösung.

(a) *Zunächst spalten wir das Integral auf*

$$F(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$$

was auch möglich ist, wenn x nicht zwischen 1 und xy liegt, also für beliebige Werte von x und y. Das erste Integral ist gleich $F(x)$ und im zweiten substituieren wir mittels $g(s) = xs$. Insgesamt erhalten wir also

$$F(xy) = F(x) + \int_1^{y} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = F(x) + F(y).$$

(b) *Für $\alpha = 0$ gilt die Gleichung. Ist $\alpha \neq 0$, so substituieren wir mittels $g(s) := s^\alpha$ und erhalten*

$$F(x^\alpha) = \int_1^{x^\alpha} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{x} \frac{1}{s^\alpha}\alpha s^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s = \alpha \int_1^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \alpha F(x).$$

(c) *Auch hier führt Substitution zum Ziel, und zwar mittels $g(s) = \mathrm{e}^s$*

$$F(\mathrm{e}^x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x} \mathrm{d}s = x.$$

Beispiel 7.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie, daß

(a) $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ auf I nicht Riemann-integrierbar ist und

(b) jede auf I monotone Funktion dort Darboux-integrierbar ist.

Hinweis für Teil (b): Sie können den folgenden Satz verwenden (ohne ihn zu beweisen): Eine auf I beschränkte Funktion, ist dort genau dann Darboux-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$.

Lösung.

(a) *Sei $I = [a, b]$, $a < b$, und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$. Wir betrachten zwei zugehörige Folgen von Zwischenpunktsystemen $(\Sigma_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\Sigma_n^1 \subset \mathbb{Q}$ und $\Sigma_n^2 \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die entsprechenden Zwischensummen gilt dann*

$$S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^1) = \sum_k 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a > 0, \quad \text{und}$$

$$S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^2) = \sum_k 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also

$$\lim_{n\to\infty} S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^1) \neq \lim_{n\to\infty} S(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, Z_n, \Sigma_n^2).$$

Der Grenzwert der Zwischensummen hängt somit von den gewählten Zwischenpunkten ab. Daher ist $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar.

(b) *Wir folgen dem Hinweis und geben ein $\varepsilon > 0$ vor. Für eine gleichmäßige Zerlegung $Z = \{a + k\frac{b-a}{n} : 0 \leq k \leq n\}$ und eine monoton wachsende Funktion f gilt dann*

$$\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}.$$

Wählen wir $n > (f(b) - f(a))(b-a)/\varepsilon$, so bleibt die Differenz zwischen Ober- und Untersumme kleiner als ε. Also ist f Darboux-integrierbar. Der Beweis für monoton fallendes f verläuft analog.

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Funktion

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie, daß die totale Variation von F gleich $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ist.

Lösung.

Zunächst halten wir fest, dass das Integral $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ wohldefiniert ist, da $|f|$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist.

Wir zeigen die Identität $V(F) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, wobei $V(F)$ die totale Variation von F bezeichnet, in zwei Schritten.

‚$\leq$': Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit $n \geq 1$. Unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der Dreiecksungleichung für das Integral erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Nehmen wir das Supremum über alle Zerlegungen, so erhalten wir $V(F) \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

‚$\geq$': Wir betrachten die Darboux-Untersumme für $|f|$ bezüglich einer beliebigen Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $n \geq 1$

$$\underline{S}(|f|, Z) = \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x)| = \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |F'(x)|.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung finden wir in jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ein ξ_k mit

$$F'(\xi_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Für die Untersumme ergibt sich daraus

$$\underline{S}(|f|, Z) \leq \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| |F'(\xi_k)| = \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})|,$$

und in weiterer Folge

$$\sup_Z \underline{S}(|f|, Z) \leq V(F).$$

Ist nun $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen deren Feinheit gegen 0 konvergiert, so folgt

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \lim_{j\to\infty} \underline{S}(|f|, Z_j) \leq \sup_Z \underline{S}(|f|, Z) \leq V(F).$$