Zur Verfügung gestellt von:
Otmar Scherzer
UE Analysis 1, WiSe 2021/22
LV-Nr.: 250012
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungsblatt 1

Beispiel 1.

Bestimmen Sie das Innere, den Abschluß und den Rand der Mengen

(a) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < 2\}$ in $\mathbb{C}$,

(b) $A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists r \in \mathbb{Z} : y = rx\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(c) $A_3 := \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und

(d) $A_4 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ die Beziehung

$$\mathring{A} = \mathbb{C}^n \setminus \overline{A^c}$$

gilt, wobei $A^c = \mathbb{C}^n \setminus A$ das Komplement von A in $\mathbb{C}^n$ bezeichne.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktionen

(a) $f_1 : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sqrt[n]{x}$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \lfloor x \rfloor$,

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) := \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$,

(d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) := (x^2 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 3) g(|x|)^{-1}$, und

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$,

stetig sind, wobei $g :]0, \infty[\to]0, \infty[$ eine beliebige stetige Funktion bezeichne und die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

definiert sei.

Beispiel 4.

Sei

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{p(z)}{q(z)},$$

eine rationale Funktion mit zwei Polynomfunktionen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - a_i) \text{ und } q(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - b_j)$$

für Punkte $(a_i)_{i=1}^m$ und $(b_j)_{j=1}^n$ in $\mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{C}$, auf der f wohldefiniert und stetig ist.

(b) Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge $\hat{D} \supset D$ von $\mathbb{C}$, für die eine stetige Funktion $\hat{f} : \hat{D} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_D = f$ existiert.

Beispiel 5.
Seien $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, stetige Funktionen. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \max_{j \in \{1,\dots,n\}} f_j(x),$$

stetig ist.

Beispiel 6.
Bestimmen Sie, in welchen Punkten die Funktion

$$f \colon [0,\infty[^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y > x, \\ \frac{y}{x} & \text{für } x > y, \\ 1 & \text{für } x = y, \end{cases}$$

stetig ist.

Beispiel 7.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt konkav, falls

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \text{ für alle } \lambda \in [0,1] \text{ und alle } x, y \in]a,b[$$

gilt. Zeigen Sie, daß jede konkave Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ auf $]a,b[$ stetig ist.

Beispiel 8.
Eine Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, wenn für jeden Punkt $x \in]a,b[$ und jede gegen den Punkt x konvergierende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

gilt.
Zeigen Sie, daß eine Funktion $f \colon]a,b[$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn die Funktion

$$\hat{f} \colon]a,b[\to \mathbb{R},\ \hat{f}(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n+1}}(x)\},$$

mit f übereinstimmt.

Übungsblatt 2

Beispiel 1.

(a) Zeigen Sie, daß die Summe zweier gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, daß das Produkt zweier gleichmäßig stetiger und beschränkter Funktionen gleichmäßig stetig ist. Finden Sie ein Gegenbeispiel, falls eine der beiden Funktionen nicht beschränkt ist.

(c) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktionen. Zeigen Sie, daß $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 2.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$, mit reellen Koeffizienten $(a_k)_{k=0}^n$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

Lipschitz-stetig und ob sie gleichmäßig stetig sind.

Beispiel 3.

Bestimmen Sie, für welche Parameter $a \in [0, \infty[$ und $p \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ (oder allgemeiner $p \in \mathbb{Q}$) die Funktion

$$f\colon]a, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x^p,$$

Lipschitz-stetig und für welche sie gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 4.

(a) Finden Sie eine Funktion $f\colon]0, 1] \to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Finden Sie eine Funktion $g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, welche stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 5.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie, daß reelle Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a|x| + b \le f(x) \le c|x| + d \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

existieren.

Beispiel 6.

Wir nennen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Hölder-stetig zu einem rationalen[1] Exponenten $\alpha \in]0, 1]$, falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$$

existiert. Zeigen Sie, daß jede Hölder-stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu einem rationalen Exponenten $\alpha \in]0, 1]$ gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 7.

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |(x-1)^2 - 2|.$$

[1] Die gleiche Definition samt folgender Aussage gilt genauso für irrationale Exponenten. Wir formulieren es jedoch nur für rationale Exponenten, da das Potenzieren mit irrationalen Exponenten bisher noch nicht eingeführt wurde.

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß f in $[a, b]$ ein globales Minimum besitzt.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unterhalbstetigen Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, die kein globales Maximum besitzt.

Übungsblatt 3

Beispiel 1.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, überall positive Funktion mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Zeigen Sie, daß f ein globales Maximum hat.

Beispiel 2.

Es bezeichne $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z(x) \coloneqq |x - 2\lfloor \frac{1}{2}(x+1) \rfloor|$, die in den Lösungen von Übungsblatt 2 verwendete Zick-Zack-Funktion. Bestimmen Sie, ob die Gleichungen

(a) $x^{1001} + \frac{1}{1+x^2+z(x)} = 42$ und

(b) $z(x) = x - 1$

Lösungen $x \in \mathbb{R}$ besitzen.

Beispiel 3.

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes: Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei entweder $g(a) = a$ und $g(b) = b$ oder $g(a) = b$ und $g(b) = a$ gelte. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = g(x)$.

Beispiel 4.

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen auf $\mathbb{R}$. Welche der Funktionen $f + g$, fg und $g \circ f$ sind monoton wachsend?

Beispiel 5.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, daß eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist.

Beispiel 6.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \frac{ax+b}{cx+d}.$$

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $D \subset \mathbb{R}$, auf der f wohldefiniert ist, sowie das Bild $f(\mathbb{R})$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse $f^{-1}\colon f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Beispiel 7.

Bestimmen Sie, auf welcher Teilmenge des Definitionsgebiets die Funktionenfolge

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) \coloneqq x^n$,

(b) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $g_n(x) \coloneqq \frac{nx}{nx+1}$, beziehungsweise

(c) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $h_n(x) \coloneqq \frac{1}{n}(1 - (x - a_n)^2)$,

punktweise konvergiert und ob sie auf dieser Menge auch gleichmäßig konvergiert. Dabei bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $[0,1]$.

Beispiel 8.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f(z) \coloneqq \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

stetig ist.

Übungsblatt 4

Beispiel 1.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \left]0, +\infty\right[$ eine stetige Funktion mit

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$

$$f(ny) = \big(f(y)\big)^n$$

gelten muß.

(b) Folgern Sie, daß wir damit für jedes $y \in \mathbb{R}$ und jedes $r \in \mathbb{Q}$

$$f(ry) = \big(f(y)\big)^r$$

haben.

(c) Schließen Sie dann, daß jede Lösung f die Form

$$f(x) = a^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

für ein $a \in \left]0, +\infty\right[$ hat.

Beispiel 2.

Wir betrachten die Sinusfunktion

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

und die Cosinusfunktion

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(a) Zeigen Sie, daß wir für alle $x \in [0, 5]$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin(x) \le x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \text{ und} \\ &1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos(x) \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \end{aligned}$$

haben.

(b) Folgern Sie, daß die Cosinusfunktion eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Wir definieren die Kreiszahl π dadurch, daß diese Nullstelle gerade $\frac{\pi}{2}$ sei.

Beispiel 3.

Schließen Sie aus Beispiel 2, daß

(a) $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(b) $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1$ und

(c) sin und cos periodische Funktionen mit der Periode 2π sind (was bedeutet, daß $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).

Beispiel 4.

Beweisen Sie, daß die Funktion

$$f\colon]-\pi,\pi] \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\},\ f(\varphi) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

für jedes $R > 0$ bijektiv ist.

Beispiel 5.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Differenzierbarkeit ist „stärker“ als Stetigkeit: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f in x auch stetig.

(b) Ableiten ist eine lineare Operation: Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Linearkombination $af + bg$ bei x differenzierbar und es gilt

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Beispiel 6.

Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{1}{x}$,

(c) $f_3\colon]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f_3(x) = \sqrt{x}$

durch direkte Auswertung des Grenzwerts

$$\lim_{y \to x} \frac{f_i(y) - f_i(x)}{y - x}.$$

Beispiel 7.

Bestimmen Sie, ob die Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) := x^2 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$,

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind.

Beispiel 8.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, nur anhand der Definition der Ableitung, daß

(a) die Ableitung einer geraden Funktion ungerade, und

(b) die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist.

Übungsblatt 5

Beispiel 1.

Bestimmen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die Konvergenzradien der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} z^{2k+1},$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} z^{2k+1},$

wobei die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, durch die Rekursion

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha - k}{k+1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

mit dem Anfangswert $\binom{\alpha}{0} = 1$ definiert sind.

Beispiel 2.

Wir betrachten die rekursiv durch

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit den Anfangswerten $f_0 \coloneqq 0$ und $f_1 \coloneqq 1$ definierte Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um eine explizite Darstellung zu bekommen, siehe Beispiel 3.(b), definieren wir zunächst die Potenzreihe

$$F\colon \mathrm{B}_R(0) \to \mathbb{C},\ F(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

wobei $R > 0$ so gewählt sei, daß die Reihe auf $\mathrm{B}_R(0)$ konvergiere.

(a) Verifizieren Sie, daß ein Radius $R > 0$ existiert, für den die Funktion F wohldefiniert ist.

(b) Folgern Sie aus der Rekursionsgleichung, daß die Funktion F durch

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_R(0)$$

gegeben ist.

Beispiel 3.

(a) Schreiben Sie die Funktion F aus Beispiel 2.(b) in der Form

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b}$$

mit geeigneten Konstanten $A, B, a, b \in \mathbb{C}$ und bestimmen Sie damit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und einen Radius $r > 0$, für die

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ für alle } z \in \mathrm{B}_r(0)$$

gilt.

(b) Beweisen Sie, daß die in Beispiel 2 definierten Fibonacci-Zahlen durch

$$f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\Big((1+\sqrt{5})^n - (-1)^n(\sqrt{5}-1)^n\Big) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegeben sind.

Beispiel 4.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) \leq af(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß

$$f(x) \geq \mathrm{e}^{ax} f(0) \text{ für alle } x \in \left]-\infty, 0\right] \text{ und}$$
$$f(x) \leq \mathrm{e}^{ax} f(0) \text{ für alle } x \in \left[0, +\infty\right[$$

gilt.

Beispiel 5.

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und n-mal differenzierbar auf $]a,b[$. Beweisen Sie, daß die n-te Ableitung $f^{(n)}\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Nullstelle besitzt, falls f selbst $n+1$ Nullstellen hat.

(b) Nutzen Sie Punkt (a) um die folgende Aussage zu beweisen:

Seien $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ in $[a,b]$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(N+1)$-mal differenzierbare Funktion und $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad höchstens N, welches $g(x_i) = p(x_i)$ für alle $i = 0, \dots, N$ erfüllt. Dann gibt es für jedes $x \in [a,b]$ ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$g(x) - p(x) = \frac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} q(x),$$

wobei $q(x) \coloneqq \prod_{i=0}^{N} (x - x_i)$ sei.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$h(t) \coloneqq q(x)(g(t) - p(t)) - q(t)(g(x) - p(x))$$

und zeigen Sie, daß sie $N+2$ Nullstellen hat.

Beispiel 6.

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\big(\tan(x)\big)^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan(2x\tan(x))$.

Beispiel 7.

Wir betrachten die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Bestimmen Sie

(a) die Extrema,

(b) das Monotonieverhalten,

(c) die maximalen Intervalle, auf welchen f konvex oder konkav ist, sowie

(d) die Grenzwerte $\lim_{x\to -1} f'(x)$ und $\lim_{x\to 1} f'(x)$.

Skizzieren Sie den Graphen von f.

Beispiel 8.

(a) Berechnen Sie $\int \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$I_n \coloneqq \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Übungsblatt 6

Beispiel 1.

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^n}\,\mathrm{d}x$ auf $]0,\pi[$ für $n = 2,3,4,5$ und

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + x^5}\,\mathrm{d}x$ auf $]0,\infty[$.

Beispiel 2.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f\colon\,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$, deren n-te Ableitung durch

$$f^{(n)}(x) = \log(x)$$

gegeben ist.

Beispiel 3.

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Nützen Sie die in Punkt (a) bewiesene Identität, um das Integral

$$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x$$

für $a > 0$ als Grenzwert von Darboux-Obersummen zu berechnen.

Beispiel 4.

Verwenden Sie das Riemann-Integral, um die folgenden Grenzwerte zu berechnen

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Hinweis für Teil (b): Betrachten Sie den Logarithmus des Ausdrucks.

Beispiel 5.

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ und

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

Beispiel 6.

Wir betrachten die Funktion

$$F\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie ohne Benutzung des Logarithmus, daß F die Eigenschaften

(a) $F(xy) = F(x) + F(y)$,

(b) $F(x^\alpha) = \alpha F(x)$ und

(c) $F(\mathrm{e}^x) = x$

für alle $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ hat.

Beispiel 7.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie, daß

(a) $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ auf I nicht Riemann-integrierbar ist und

(b) jede auf I monotone Funktion dort Darboux-integrierbar ist.

Hinweis für Teil (b): Sie können den folgenden Satz verwenden (ohne ihn zu beweisen): Eine auf I beschränkte Funktion, ist dort genau dann Darboux-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$.

Beispiel 8.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Funktion

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie, daß die totale Variation von F gleich $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ist.