Zur Verfügung gestellt von:
Hermann Schichl
UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
WiSe 2017/18
LV-Nr.: 250014
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

41. Beschreiben Sie alle möglichen Lagen von drei Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Geben Sie für jede dieser Lagen jeweils ein Beispiel.

42. Beschreiben Sie alle möglichen Lagen von zwei Ebenen im $\mathbb{R}^4$. Dabei sei eine Ebene ε im $\mathbb{R}^4$ wie folgt gegeben: Seien $0 \neq v, w \in \mathbb{R}^4$ zwei Vektoren, die nicht kollinear sind, d.h. es gibt keine reelle Zahl λ mit $v = \lambda w$. Dann ist

$$\varepsilon := \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

43. Ist $\mathbb{R}^2$ mit den komponentenweisen Operationen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

ein Körper?

44. Sei der Körper $\mathbb{Z}_p$ für p prim gegeben und betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{Z}_p^n$ für $n \geq 2$. Für $0 \neq (v_1, \dots, v_n) =: v \in \mathbb{Z}_p^n$ und $Q := (Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ definieren wir die Gerade $g_{Q,v}$ in Richtung v durch Q als die Menge

$$g_{Q,v} := \{Q + rv \mid r \in \mathbb{Z}_p\}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller Geraden in den Vektorräumen $\mathbb{Z}_2^3$ und $\mathbb{Z}_3^2$. Machen Sie eine Skizze.

45. Mit den Begriffen aus Aufgabe 44 untersuchen Sie alle möglichen Lagebeziehungen von Geraden in $\mathbb{Z}_p^2$.

46. Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Teilräume (mit Begründung)?

   (a) $\{(x, y, z) \mid y = 0\}$
   (b) $\{(x, y, z) \mid x = 1\}$
   (c) $\{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } z = 0\}$
   (d) $\{(x, y, z) \mid ax + by = cz\}$ für fixes $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (e) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z\}$

47. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und W ein Teilraum von V. Dann ist W selbst wieder ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei nun U ein Teilraum von W. Zeigen Sie, dass dann U auch ein Teilraum von V ist.

48. Sei $\mathcal{F}_\mathbb{R} := \{(x_n)_n := (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren

$$\begin{aligned} (x_0, x_1, x_2, \dots) + (y_0, y_1, y_2, \dots) &:= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \\ r \cdot (x_0, x_1, x_2, \dots) &:= (rx_0, rx_1, rx_2, \dots), \end{aligned}$$

für alle $(x_n)_n, (y_n)_n$ und $r \in \mathbb{R}$, einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet und untersuchen Sie, ob die Teilmenge $\mathcal{K}_\mathbb{R}$ aller konvergenten Folgen einen Teilraum bildet,

$$\mathcal{K}_\mathbb{R} := \{(x_n)_n \mid \lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $\mathcal{N}_\mathbb{R}$ die Menge aller Nullfolgen. Was gilt dann für $\mathcal{N}_\mathbb{R}$ (in Bezug auf die Vektorraum–Eigenschaften)?

49. Eine reelle Folge $(x_n)_n \in \mathcal{F}_\mathbb{R}$ heiße beschränkt, wenn $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ der beschränkten reellen Folgen einen Vektorraum bildet.

50. Zeigen Sie direkt, dass die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) := 3x + 5$ und $g(x) = x^2$ gegeben sind, keine linearen Abbildungen sind.

    Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $f \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

51. Welche der folgenden Abbildungen ist linear?

    (a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 4x + 3y - 15z$,
    (b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2x + y - 2z + 5$,
    (c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, 3x + 15z)$,
    (d) $f_4 : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + 2xz + z^2 + x + z, x^2 + y^2 + z^2)$,
    (e) $f_5 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + 2xz + z^2 + x + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

52. Untersuchen Sie die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, die einer komplexen Zahl die konjugiert komplexe Zahl zuordnet. Zeigen Sie, dass diese Abbildung linear ist, wenn $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachtet wird. Ist das auch der Fall, wenn man $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auffasst? Wie steht es, wenn $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ betrachtet wird?

53. Sei $\mathcal{K}_\mathbb{R}$ wie in Aufgabe 48 definiert. Ist die Abbildung $\lim : \mathcal{K}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ eine lineare Abbildung?

54. Sei $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ wie in Aufgabe 49 definiert. Wir betrachten die Abbildung $\sup : \mathcal{B}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x_n)_n \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Ist diese Abbildung linear?

55. Betrachten Sie analog zu Aufgabe 48 die Menge aller Folgen $\mathcal{F}_\mathbb{K}$ von Elementen eines Körpers $\mathbb{K}$. Begründen Sie, warum $\mathcal{F}_\mathbb{K}$ ein Vektorraum ist. Zeigen Sie, dass dann die Teilmenge aller Folgen $\mathcal{P}_\mathbb{K}$, die nur endlich viele Glieder ungleich 0 haben,

$$\mathcal{P}_\mathbb{K} := \{(x_n)_n \in \mathcal{F}_\mathbb{K} \mid \exists N \geq 0 : \forall k \geq N : x_k = 0\},$$

    ein Teilraum ist.

Erinnern Sie sich an die Definition eines Polynoms über $\mathbb{K}$ aus der Vorlesung. Machen Sie sich klar: Ein Polynom $p = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ ist durch die (unendlich fortgesetzte) *Folge* seiner Koeffizienten

$$p \sim (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

eindeutig bestimmt (hier sind alle Folgenglieder c_k mit $k > \deg p$ gleich 0).

Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{K}[z]$ der Polynome über $\mathbb{K}$ isomorph zu $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ ist.

56. Aus der Schule kennen Sie die Multiplikation von *zwei* reellen Polynomen p und q. Geben Sie eine diesem Produkt $p \cdot q$ entsprechende Verknüpfung $\cdot$ an, die auf $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ definiert ist, also nur die Koeffizienten verwendet und nicht die Variable X.

    (Hinweis: Der gesuchte Ausdruck ist für jeden Koeffizienten der Ergebnisfolge eine Summe von Produkten von Elementen aus $\mathbb{K}$.

    Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ mit der Addition und der so definierten Multiplikation einen *Integritätsbereich* bildet.

57. Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass die Funktionen $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ mit $D(\sum_k a_k X^k) = \sum_k k a_k X^{k-1}$ und $M : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ mit $M(\sum_k a_k X^k) = \sum_k a_k X^{k+1}$ linear sind und bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(D)$, $\operatorname{Ker}(M)$, $\operatorname{Im}(D)$ und $\operatorname{Im}(M)$. Um welche Abbildungen handelt es sich?

    Zeigen Sie, dass für alle $n > 0$ gilt, dass $D \circ M^n - M^n \circ D = nM^{n-1}$ gilt, wobei $M^0 := \mathrm{id}$ und $M^{k+1} := M \circ M^k$ sei.

58. Bestimmen Sie explizit Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $f(x, y, z) = (4x - 2z, 3y + 4z)$.

59. Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und seien $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{v \in V : f(v) = g(v)\}$ ein Teilraum von V ist.

60. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$–Vektorräumen. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen weiteren $\mathbb{K}$–Vektorraum U durch $f_*(g) := f \circ g$ eine lineare Abbildung $f_* : L(U, V) \to L(U, W)$ definiert wird.

61. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$–Vektorräumen. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen weiteren $\mathbb{K}$–Vektorraum Z durch $f^*(g) := g \circ f$ eine lineare Abbildung $f^* : L(W, Z) \to L(V, Z)$ definiert wird.

62. Sei $f \in L(V, V)$. Wir schreiben $f^2 := f \circ f$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

63. Seien U, V, W drei Vektorräume über $\mathbb{K}$, $f \in L(U, V)$ und $g \in L(V, W)$. Zeigen Sie:

    (a) $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\operatorname{Ker}(g))$,

    (b) $\operatorname{Ker}(g \circ f) \supseteq \operatorname{Ker}(f)$,

(c) $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im}(f))$,

(d) $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im}(g)$,

(e) $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$ genau dann, wenn $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

64. Bestimme die Matrix zu all jenen Abbildungen aus Beispiel 51, die linear sind.

65. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen A und B die Produkte AB, BA und $(AB)^2 = ABAB$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Kann man $A^2 = AA$ oder $B^2 = BB$ bilden?

66. Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2-i & -3i \\ 0 & 3+2i & -1 & 1-2i \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{C})$ und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 1+3i \end{pmatrix}$,

$y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ die Produkte Ax und Ay.

67. Berechnen Sie $A^2 = AA$ und A^3 für $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Ändert sich etwas, wenn man A als Element von $M_2(\mathbb{Z}_{13})$ betrachtet?

68. Zeigen Sie, dass für eine fixe Matrix $C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ die Vorschrift $A \mapsto CA$ eine lineare Abbildung $M_{n,k}(\mathbb{K}) \to M_{m,k}(\mathbb{K})$ definiert und vergleichen Sie das mit Beispiel 60.

69. Zeigen Sie, dass für eine fixe Matrix $C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ die Vorschrift $A \mapsto AC$ eine lineare Abbildung $M_{k,m}(\mathbb{K}) \to M_{k,n}(\mathbb{K})$ definiert und vergleichen Sie das mit Beispiel 61.

70. Finden Sie eine 3×3–Matrix A über $\mathbb{R}$, sodass A und A^2 nicht die Nullmatrix sind, aber A^3 die Nullmatrix ist. Geht das auch für 2×2–Matrizen?

    Anleitung: Suchen Sie eine geeignete lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

71. Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ die Summe $A+B$ und das Matrizenprodukt AB und vergleichen Sie das mit den entsprechenden Operationen für die komplexen Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$.

    Folgern Sie daraus, dass die Menge der 2×2 Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit der Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bildet, der isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

72. Eine Matrix $N \in M_n(\mathbb{K})$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N^k = 0$, also die Nullmatrix ist. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{I}_n - A$ invertierbar ist und

$$(\mathbb{I} - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} A^j$$

gilt.

73. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

74. Für welche $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$ besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung über $\mathbb{C}$?

$$\begin{aligned} 9x_1 - 7ix_2 + 8x_3 &= b_1 \\ -ix_1 - 2x_2 + x_3 &= b_2 \\ 7ix_1 - 8x_2 + (11 + 16i)x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Lösung in Abhängigkeit von den b_i.

75. Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems für $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_5$.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

76. Sei $A = \in M_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie, ob A invertierbar ist und berechnen Sie gegebenen Falls die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

77. Bestimmen Sie die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

78. Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 19y + 2z \\ x - 4y + z \\ 3x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

79. Untersuchen Sie, ob die Menge $\{(2,1,3),(1,1,0),(3,0,4)\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$ ist. Ist sie ein Erzeugendensystem für $\mathbb{Q}^3$ oder $\mathbb{C}^3$?

80. Überprüfen Sie, ob die Menge $\{(0,1,-1),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ ist. Ist sie in $\mathbb{Q}^3$ linear unabhängig, bzw. in $\mathbb{C}^3$?

81. Zeigen Sie direkt, dass die Polynome $B_0 = X^2$, $B_1 = -2X^2 + 2X$ und $B_2 = X^2 - 2X + 1$ linear unabhängig in $\mathbb{R}[X]$ sind. Zeigen Sie außerdem, dass sie ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^2[X]$ sind. Berechnen Sie $B_0 + B_1 + B_2$.

82. Zeigen Sie, dass die Menge $\{X^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis für den Vektorraum $\mathbb{K}[X]$ über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ bildet. Schließen Sie daraus, dass $\mathbb{K}[X]$ nicht endlich erzeugt ist.

83. Zeigen Sie, dass die Menge $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ einen Vektorraum bildet und eigen Sie, dass die Menge $\{e^{kx} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ linear unabhängig in $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist.

84. Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum, und sei $\{W_i \mid i \in I\}$ eine nichtleere Familie von Teilräumen von V, sodass für alle Paare $(i,j) \in I^2$ ein $k \in I$ existiert mit $W_i \cup W_j \subseteq W_k$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i\in I} W_i$ ein Teilraum von V ist.

    Wie sieht es mit der Umkehrung der Aussage aus?

85. Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und W ein Teilraum der Dimension $n-1$. Zeigen Sie:

    (a) Es gibt eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$, sodass $W = \mathrm{Ker}(f)$ gilt.

    (b) Ist $g : V \to \mathbb{K}$ eine weitere lineare Abbildung mit $\mathrm{Ker}(g) = W$, dann gibt es ein Element $r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, sodass $g(v) = rf(v)$ für alle $v \in V$ gilt.

    Anleitung für (a): Erweitern Sie eine Basis für W zu einer Basis für V und definieren Sie f auf den Elementen dieser Basis.

86. Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und W ein k–dimensionaler Teilraum von V. Zeigen Sie:

    (a) Es gibt eine (surjektive) lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}^{n-k}$ sodass $W = \mathrm{Ker}(f)$ gilt.

(b) Ist $g : V \to \mathbb{K}^{n-k}$ eine weitere lineare Abbildung mit $W = \mathrm{Ker}(g)$, dann gibt es einen (eindeutigen) linearen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{K}^{n-k} \to \mathbb{K}^{n-k}$, sodass $g = \varphi \circ f$ gilt.

87. Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und W ein k–dimensionaler Teilraum von V. Zeigen Sie:

    (a) Es gibt eine (injektive) lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^k \to V$ sodass $W = \mathrm{Im}(f)$ gilt.

    (b) Ist $g : \mathbb{K}^k \to V$ eine weitere lineare Abbildung mit $W = \mathrm{Im}(g)$, dann gibt es einen (eindeutigen) linearen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$, sodass $g = f \circ \varphi$ gilt.

88. Bestimmen Sie ein Komplement zur Ebene $\{(x, y, z) \mid 3x + 4y - z = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$.

89. Zeigen Sie, dass jede Gerade $g_b := \{(t, tb, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $b \in \mathbb{R}^z \setminus \{0\}$ ein Komplement für die Ebene $\{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ ist.

90. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(p) = n + 1$. Man bezeichne mit $p \cdot \mathbb{R}[X]$ die Menge aller Polynome, die durch p teilbar sind. Zeigen Sie:

    (a) $p \cdot \mathbb{R}[X]$ ist ein Teilraum von $\mathbb{R}[X]$.

    (b) $\mathbb{R}^n[X]$ und $p \cdot \mathbb{R}[X]$ sind komplementär in $\mathbb{R}[X]$.

91. Zeigen Sie, dass die Mengen der geraden Funktionen

$$\mathcal{F}_g(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$$

und der ungeraden Funktionen

$$\mathcal{F}_u(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$$

komplementär in $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind. Vergessen Sie dabei nicht zu zeigen, dass $\mathcal{F}_g(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{F}_u(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Teilräume sind.

92. Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$–Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum. Zeigen Sie, dass es eine *Projektion* auf W gibt, also eine lineare Abbildung $\pi : V \to W$, sodass $\pi(w) = w$ für alle $w \in W$ gilt. Zeige Sie außerdem, dass $\ker(\pi) \subset V$ ein Komplement zu W ist. Kann man so jedes Komplement erhalten?

93. Beweisen Sie, dass für zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume V_1 und V_2 das kartesische Produkt $V_1 \times V_2$ die Vektorraumeigenschaften (V5) bis (V8) erfüllt.

94. Bestimmen Sie über $\mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 & 9 \\ -2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & -3 & 7 & 13. \end{pmatrix}$$

Wie ist der Rang über $\mathbb{Q}$ bzw. über $\mathbb{C}$?

95. Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und sei $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass A und AT den gleichen Rang haben.

96. Betrachten Sie die Standardbasis $\mathcal{E}$ und die Basis $\mathcal{B} := \{(1,3),\ (2,2)\}$ von $\mathbb{Z}_5^2$. Berechnen Sie die Basiswechselabbildungen von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}$ und umgekehrt. Bestimmen Sie für den Vektor $v = (2,4)$ (bezüglich der Standardbasis) den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$.

    Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ mit $(x,y) \mapsto (3x+2y, 4x+y)$ bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ und $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

97. Betrachten Sie die Standardbasis $\mathcal{E}$ und die Basen $\mathcal{B} := \{(1,1,0),\ (0,-1,1),\ (-1,0,1)\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} := \{(2,0,1),\ (1,1,1)\ (-1,3,0)\}$ des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Basiswechselabbildungen von $\mathcal{B}$ zu $\tilde{\mathcal{B}}$, von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{E}$, sowie von $\tilde{\mathcal{B}}$ zu $\mathcal{E}$. Bestimmen Sie für den Vektor $v = (1,4,2)$ (bezüglich der Standardbasis) die Koordinatenvektoren $[v]_{\mathcal{B}}$ und $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

    Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x,y,z) \mapsto (3x+2z, x-4y, 6y-z)$ bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $[f]_{\mathcal{E}}^{\tilde{\mathcal{B}}}$, sowie $[f]_{\mathcal{B}}^{\tilde{\mathcal{B}}}$.

98. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}_2[X]$ die zugehörige Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$p(-1) = r_0 p(0) + r_1 p(1) + r_2 p(2)$$

    erfüllt. Bestimmen Sie diese Zahlen explizit.

99. Betrachten Sie den Vektorraum $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ (warum ist das tatsächlich ein Vektorraum?). Zeigen Sie, dass die Menge T_n der trigonometrischen Polynome s höchstens n–ten Grades

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(2\pi jx)$$

    ein Teilraum von $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ ist. Wir gehen davon aus, dass $\{1, \sin(2\pi kx), \cos(2\pi kx)\}$ für $1 \leq k \leq n$ eine Basis bildet. Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator $D : C^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to C^\infty([0,1],\mathbb{R})$, mit $f \mapsto f'$, den Teilraum T_n auf sich selbst abbildet. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von D bezüglich dieser Basis.

    Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Matrixdarstellung D auf den Polynomen $\mathbb{R}_n[X]$ höchstens n–ten Grades. Was fällt Ihnen auf?