Zur Verfügung gestellt von:
Hermann Schichl
VO Lineare Algebra und Geometrie 2
WiSe 2018/19
LV-Nr.: 250037
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu "Lineare Algebra und Geometrie 2"

Hermann Schichl

Wintersemester 2018/19

Polynome

(1) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler d der folgenden Polynome $p, q \in \mathbb{R}[X]$ und stellen Sie diesen in der Form $d = rp + sq$ mit $r, s \in \mathbb{R}[X]$ dar:
(a) $p(X) = X^4 + X^3 - X - 1$, $q(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 - 1$,
(b) $p(X) = X^5 + X^3 + 2X^2 + 3X + 2$, $q = X^5 - X^4 - 2X^3 - 4X^2 - 2X - 1$,
(c) $p(X) = X^5 + 2X^2 - X + 2$, $q = X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2$.
Hinweis: Wiederholen Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus aus dem Buch "Einführung in das mathematische Arbeiten".

(2) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Zeigen Sie, dass es unendlich viele monische irreduzible Polynome in $\mathbb{K}[X]$ gibt.

(3) Es sei $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom, das in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass genau dann alle Nullstellen von p einfach sind, wenn p und p' relativ prim sind.

(4) Der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(p_1, \dots, p_n)$ von n Polynomen $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}[X]$ ist jenes monische Polynom, das alle p_i teilt und selbst von allen gemeinsamen Teilern der p_i geteilt wird. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{ggT}(p_1, \dots, p_n) = \mathrm{ggT}(p_1, \dots, p_{n-2}, \mathrm{ggT}(p_{n-1}, p_n))$$

gilt. Beweisen Sie ferner das Lemma von Bezout, also die Existenz von $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{K}[X]$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} r_i p_i = \mathrm{ggT}(p_1, \dots, p_n).$$

Minimalpolynom

(5) Bestimmen Sie charakteristisches Polynom und Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(6) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{Z}_2$.

(7) Geben Sie eine Matrix an, deren charakteristisches Polynom $(x-1)^3(x+1)^2$ ist und deren Minimalpolynom $(x-1)^2(x+1)$ ist.

(8) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordansche Normalform

(9) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(10) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{9}{4} & \frac{7}{2} & -2 \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

(11) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{9}{4} & \frac{7}{2} & -2 \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

(12) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{41}{4} & \frac{39}{4} & -\frac{33}{4} \\ -\frac{11}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix}.$$

(13) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -7 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$