Zur Verfügung gestellt von:
Christian Schmeiser
UE StEOP Einführung in das mathematische Arbeiten, WiSe 2016/17
LV-Nr.: 250015
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Einführung in die Analysis, WS 16/17, Übungsblatt, Woche ab 17.10.

1. Man beweise die Aussage: Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.

2. Man bestimme die Primfaktorenzerlegung der folgenden Zahlen:
$$400, \qquad 2049, \qquad 279936, \qquad 362880.$$

3. Man beweise die Aussage: Es gibt keine ganzen Zahlen m und n, sodass
$$12m + 15n = 200\,.$$

4. Man schreibe folgende Ausdrücke ohne Verwendung von Summen- bzw. Produktzeichen:
$$\sum_{k=2}^{7} k^{2k+1}\,, \qquad \sum_{j=-5}^{-2} a_k\,, \qquad \prod_{i=1}^{3} 2^i\,, \qquad \prod_{j=1}^{5} j^3\,.$$

5. Man schreibe folgende Ausdrücke ohne Verwendung von Summen- bzw. Produktzeichen:
$$\sum_{j=3}^{5}\prod_{k=1}^{3}(jk-2)\,, \qquad \sum_{k=0}^{3}\sum_{j=k}^{3} a_k^j\,.$$

6. Mit Hilfe des vorhergehenden Beispieles verifiziere man die Gleichung
$$\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=k}^{3} a_k^j = \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{j} a_k^j\,.$$
Wie kann man direkt zu diesem Resultat kommen? (Hinweis: Über welche Paare (k, j) wird summiert?)

7. Man berechne
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1+(-1)^j}{2}$$
zunächst für $n = 6$ und dann für beliebige natürliche Zahlen n, wobei im zweiten Fall das Resultat verbal beschrieben werden kann.

8. Man berechne

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij} \qquad (\delta_{ij} \text{ ist das Kronecker-Delta}).$$

9. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes berechne man

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,.$$

   Man kontrolliere die beiden Resultate für $n = 4$.

10. Man berechne $p(-2)$ für das Polynom

$$p(x) = \sum_{i=2}^{25}\binom{25}{i}x^i\,.$$

Einführung in die Analysis, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 24.10.

1. Für die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme man $f(A)$ und $f^{-1}(B)$:
a) $f(x) = x + 3$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B =]-1, 3[$.
b) $f(x) = x^2 - 1$, $A =]-1, 1[$, $B = \{-1, 0\}$.
c) $f(x) = 5$, $A = \{0\} \cup]1, 2[$, $B = \{5\}$.

2. Seien A_1, A_2 Teilmengen der Definitionsmenge von f. Man zeige
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$
und konstruiere ein Beispiel, bei dem nicht die Gleichheit gilt. Man gebe eine in der Vorlesung definierte Eigenschaft von f an, die die Gleichheit garantiert.

3. Selbe Aufgabenstellung wie im vorigen Beispiel für
$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)\,.$$

4. Man untersuche die Abbildung
$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}$$
auf Injektivität und Surjektivität.

5. Man klassifiziere die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k + a$ mit $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, bezüglich der Eigenschaften injektiv und surjektiv. Wenn diese nicht gelten, verkleinere man Definitions- und/oder Bildmenge, sodass die entstehende Abbildung bijektiv ist.

6. Sei $f: A \to B$ eine Funktion und $A_1 \subset A$. Man zeige, dass die Mengen $f(A^c)$ und $f(A)^c$ bezüglich $\subset$ im Allgemeinen nicht vergleichbar sind. Was kann man für injektive bzw. surjektive Funktionen aussagen?

7. Man zeige
$$f \text{ und } g \text{ bijektiv} \quad \Rightarrow \quad f \circ g \text{ bijektiv}$$
und, dass die Äquivalenz nicht stimmt (durch Angabe eines Gegenbeispiels).

8. Man zeige, dass die Abbildung
$$f: \{1, 2, 3\}^2 \to \{0, 1, \ldots, 8\}\,, \qquad f((m, n)) = 3(m-1) + n - 1\,,$$
bijektiv ist, und man bestimme die Umkehrabbildung.

Einführung in die Analysis, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 31.10.

1. a) Gibt es zwei Funktionen f und g , die beide nicht bijektiv sind, sodass $f \circ g$ bijektiv ist?
   b) Gibt es zwei Funktionen f und g , die beide nicht injektiv sind, sodass $f \circ g$ injektiv ist?

2. Man zeige, dass für endliche Mengen M

$$\operatorname{card}(\mathbb{P}M) = 2^{\operatorname{card}(M)}$$

   gilt (Hinweis: vollständige Induktion mit $\operatorname{card}(M) = n$).

3. Man beweise

$$\forall x \geq -1 : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

4. Man beweise, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

5. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$?

6. Sei $b \in \mathbb{N}$ (die *Basis*). Man zeige, dass jede natürliche Zahl $n > 0$ in der b-*adischen Darstellung*

$$n = \sum_{j=0}^{K} a_j b^j \qquad \text{(Schreibweise: } n = (a_K a_{K-1} \ldots a_0)_b)$$

   geschrieben werden kann mit geeignet gewählten $K \in \mathbb{N}$ und *Ziffern* $a_0, \ldots, a_K \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Fordert man $a_K \neq 0$, dann ist die Darstellung eindeutig.

7. Man finde die Binär- ($b = 2$) und die Hexadezimaldarstellungen ($b = 16$, Ziffern: $0, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F$) von

   1742, 1048576, 213, 11138.

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie, WS 16/17, Übungsblatt, Woche ab 17.10.

1. Man beweise das Assoziativgesetz für $\vee$ mit einer Wahrheitstafel (wahr=1, falsch=0).
2. Man beweise die Distributivgesetze für $\wedge$ und $\vee$ mit Wahrheitstafeln.
3. Man finde eine Darstellung der Äquivalenz, in der nur die Grundverknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ verwendet werden.
4. Mit Hilfe des vorigen Beispiels zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b Folgendes gilt:
$$a \Leftrightarrow b \quad = \quad (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)\,.$$
5. Mit Hilfe der Rechenregeln für $\wedge, \vee, \neg$ zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b Folgendes gilt:
$$[(a \vee b) \wedge \neg a] \Rightarrow b\,.$$
6. Mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b, c Folgendes gilt:
$$[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)\,.$$
7. Mit Hilfe der Definition der Implikation und mit den Rechenregeln für $\wedge, \vee, \neg$ zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b Folgendes gilt:
$$[(a \Rightarrow b) \wedge \neg b] \Rightarrow \neg a\,.$$
8. Seien G_1, G_2 Geraden. Was bedeutet die Aussage
$$(\exists x : x \in G_1 \wedge x \in G_2) \Rightarrow \neg(G_1 \text{ parallel zu } G_2)$$
in Worten? Wie lautet der äquivqlente Umkehrschluss als logische Formel und in Worten?
9. Man zeige die Gültigkeit folgender Argumente:
a) Aus $a \Rightarrow b$ und $a \Rightarrow \neg b$ folgt $\neg a$.
b) Die Tatsache, dass $a \Rightarrow (b \wedge c)$, hat als Konsequenz $(a \wedge b) \Leftrightarrow (a \wedge c)$.
10. Man verneine die Aussage: *Jede Primzahl ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar.*

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie, WS 16/17, Übungsblatt, Woche ab 24.10.

1. Man bestimme die symmetrische Mengendifferenz
$$\{n^2 : \ n \in \mathbb{N}\} \Delta \{2^n : \ n \in \mathbb{N}\} .$$

2. Man zeige
$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A .$$

3. Man zähle die Elemente der Menge $\{a, b\}^3$ auf.

4. Bei einer Versuchsreihe werden 2 gemessene Längen als gleich betrachtet, wenn sie sich um weniger als 10^{-9}m unterscheiden. Definiert dieser Begriff von Gleichheit eine Äquivalenzrelation? Man gebe eine sinnvolle Modifikation des Gleichheitsbegriffs an, die eine Äquivalenzrelation erzeugt. Man beschreibe die Äquivalenzklassen.

5. Man zeige, dass die Addition von Restklassen (Äquvalenzklassen bezüglich $\sim_n$), definiert durch
$$C_k + C_l := C_{k+l} ,$$
assoziativ und kommutativ ist.

6. Wir betrachten die Menge K aller Punkte auf einer Kreislinie. Für zwei Punkte $P, Q \in K$ sagen wir $P \preceq Q$, wenn der Kreisbogen von P nach Q gegen den Uhrzeigersinn kürzer ist als der im Uhrzeigersinn. Definiert das eine Ordnungsrelation?

7. Man beschreibe die Ordnungsrelation, die zur Anordnung der Namen im Telefonbuch führt.

8. Die Relation $\preceq$ auf $\mathbb{R}^2$ wird definiert durch
$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) .$$
Man zeige, dass es sich um eine Ordnungsrelation handelt.

9. Man zeige
$$\bigcup_{n=2}^{\infty}]1/n, 1] = \bigcup_{n=3}^{\infty} [1/n, 1]$$
und, dass diese Menge als Teilmenge der reellen Zahlen mit der natürlichen Ordnungsrelation beschränkt ist. Man bestimme Supremum und Infimum. Sind diese auch Maximum bzw. Minimum?

**Einführung in die lineare Algebra und Geometrie, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 31.10.**

1. Auf $\mathbb{R}$ ist eine Verknüpfung $\otimes$ definiert durch
$$a \otimes b := ab - 4\,.$$
Ist $(\mathbb{R}, \otimes)$ eine Halbgruppe?

2. Seien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Dann nennt man das rechteckige Zahlenschema
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
eine reelle (2×2)-Matrix, und die Menge aller reellen (2×2)-Matrizen wird mit $M_2(\mathbb{R})$ bezeichnet. Man zeige, dass die durch
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$
definierte Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

3. Man finde ein neutrales Element für $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ und eine (2×2)-Matrix, deren Einträge nicht alle Null sind und für die es kein inverses Element gibt.

4. Ist $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ nullteilerfrei?

5. Man zeige, dass die Menge aller Kongruenzabbildungen, die ein Rechteck in der Ebene (das kein Quadrat ist) auf sich selbst abbilden, eine Gruppe ist. (Kongruenzabbildungen sind Drehungen, Spiegelungen und Translationen, sowie deren Zusammensetzung.)

6. Man bestimme alle Untergruppen der Gruppe aus dem vorigen Beispiel.

7. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $\mathcal{S}^1 = \{e\}$ die *triviale* einelementige Gruppe. Man zeige, dass $f: \ G \to \mathcal{S}^1$, $f(g) = e$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

8. Die Addition auf $M_2(\mathbb{R})$ ist definiert durch
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$
Man zeige die Distributivgesetze auf $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.