Einführung in die lineare Algebra und Geometrie, WS 16/17, Übungsblatt, Woche ab 17.10.

1. Man beweise das Assoziativgesetz für $\vee$ mit einer Wahrheitstafel (wahr=1, falsch=0).

2. Man beweise die Distributivgesetze für $\wedge$ und $\vee$ mit Wahrheitstafeln.

3. Man finde eine Darstellung der Äquivalenz, in der nur die Grundverknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ verwendet werden.

4. Mit Hilfe des vorigen Beispiels zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b Folgendes gilt:
$$a \Leftrightarrow b \quad = \quad (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)\,.$$

5. Mit Hilfe der Rechenregeln für $\wedge, \vee, \neg$ zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b Folgendes gilt:
$$[(a \vee b) \wedge \neg a] \Rightarrow b\,.$$

6. Mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b, c Folgendes gilt:
$$[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)\,.$$

7. Mit Hilfe der Definition der Implikation und mit den Rechenregeln für $\wedge, \vee, \neg$ zeige man, dass für beliebige Aussagen a, b Folgendes gilt:
$$[(a \Rightarrow b) \wedge \neg b] \Rightarrow \neg a\,.$$

8. Seien G_1, G_2 Geraden. Was bedeutet die Aussage
$$(\exists x : x \in G_1 \wedge x \in G_2) \Rightarrow \neg(G_1 \text{ parallel zu } G_2)$$
in Worten? Wie lautet der äquivqlente Umkehrschluss als logische Formel und in Worten?

9. Man zeige die Gültigkeit folgender Argumente:
a) Aus $a \Rightarrow b$ und $a \Rightarrow \neg b$ folgt $\neg a$.
b) Die Tatsache, dass $a \Rightarrow (b \wedge c)$, hat als Konsequenz $(a \wedge b) \Leftrightarrow (a \wedge c)$.

10. Man verneine die Aussage: *Jede Primzahl ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar.*

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie, WS 16/17, Übungsblatt, Woche ab 24.10.

1. Man bestimme die symmetrische Mengendifferenz
$$\{n^2 : \; n \in \mathbb{N}\} \Delta \{2^n : \; n \in \mathbb{N}\} \, .$$

2. Man zeige
$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \, .$$

3. Man zähle die Elemente der Menge $\{a, b\}^3$ auf.

4. Bei einer Versuchsreihe werden 2 gemessene Längen als gleich betrachtet, wenn sie sich um weniger als 10^{-9}m unterscheiden. Definiert dieser Begriff von Gleichheit eine Äquivalenzrelation? Man gebe eine sinnvolle Modifikation des Gleichheitsbegriffs an, die eine Äquivalenzrelation erzeugt. Man beschreibe die Äquivalenzklassen.

5. Man zeige, dass die Addition von Restklassen (Äquvalenzklassen bezüglich $\sim_n$), definiert durch
$$C_k + C_l := C_{k+l} \, ,$$
assoziativ und kommutativ ist.

6. Wir betrachten die Menge K aller Punkte auf einer Kreislinie. Für zwei Punkte $P, Q \in K$ sagen wir $P \preceq Q$, wenn der Kreisbogen von P nach Q gegen den Uhrzeigersinn kürzer ist als der im Uhrzeigersinn. Definiert das eine Ordnungsrelation?

7. Man beschreibe die Ordnungsrelation, die zur Anordnung der Namen im Telefonbuch führt.

8. Die Relation $\preceq$ auf $\mathbb{R}^2$ wird definiert durch
$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \, .$$
Man zeige, dass es sich um eine Ordnungsrelation handelt.

9. Man zeige
$$\bigcup_{n=2}^{\infty}]1/n, 1] = \bigcup_{n=3}^{\infty} [1/n, 1]$$
und, dass diese Menge als Teilmenge der reellen Zahlen mit der natürlichen Ordnungsrelation beschränkt ist. Man bestimme Supremum und Infimum. Sind diese auch Maximum bzw. Minimum?

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie, WS 16/17, Übungsblatt, Woche ab 31.10.

1. Auf $\mathbb{R}$ ist eine Verknüpfung $\otimes$ definiert durch
$$a \otimes b := ab - 4\,.$$
Ist $(\mathbb{R}, \otimes)$ eine Halbgruppe?

2. Seien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Dann nennt man das rechteckige Zahlenschema
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
eine reelle (2×2)-Matrix, und die Menge aller reellen (2×2)-Matrizen wird mit $M_2(\mathbb{R})$ bezeichnet. Man zeige, dass die durch
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$
definierte Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

3. Man finde ein neutrales Element für $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ und eine (2×2)-Matrix, deren Einträge nicht alle Null sind und für die es kein inverses Element gibt.

4. Ist $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ nullteilerfrei?

5. Man zeige, dass die Menge aller Kongruenzabbildungen, die ein Rechteck in der Ebene (das kein Quadrat ist) auf sich selbst abbilden, eine Gruppe ist. (Kongruenzabbildungen sind Drehungen, Spiegelungen und Translationen, sowie deren Zusammensetzung.)

6. Man bestimme alle Untergruppen der Gruppe aus dem vorigen Beispiel.

7. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $\mathcal{S}^1 = \{e\}$ die *triviale* einelementige Gruppe. Man zeige, dass $f:\ G \to \mathcal{S}^1$, $f(g) = e$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

8. Die Addition auf $M_2(\mathbb{R})$ ist definiert durch
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$
Man zeige die Distributivgesetze auf $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.