Universität Wien, WS 2020/21

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Schriftliche Online-Prüfung, 30.1. 2021

Pro Aufgabe sind 8 Punkte zu erreichen, insgesamt also 48. Ist m die erzielte Punktezahl zuzüglich Ihrer Bonuspunkte für die Samstag-Blöcke und $n = \min(m, 48)$, so gilt der folgende Notenschlüssel:

$n < 24 \Rightarrow$ Note: 5
$24 \leq n < 30 \Rightarrow$ Note: 4
$30 \leq n < 36 \Rightarrow$ Note: 3
$36 \leq n < 42 \Rightarrow$ Note: 2
$42 \leq n \leq 48 \Rightarrow$ Note: 1

Bitte schreiben Sie leserlich mit einem dunklen Stift auf einem weißen (nicht-linierten und nicht-karierten) Papier! Gestalten Sie Ihre Berechnungen und Argumentationen so, dass sie gut nachvollziehbar sind!

1.) Sei V der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2, und sei $\psi : V \to V$ jene Abbildung, die jedem Polynom $p \in V$ das durch

$$\psi(p) : x \mapsto p(0)\, x^2$$

definierte Polynom $\psi(p) \in V$ zuordnet.

(i) Zeigen Sie, dass ψ linear ist!

(ii) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von ψ bezüglich der geordneten Basis $B = \big(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\big)$.

2.) Sei $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(i) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $\mathbf{M}$.

(ii) Ist $\mathbf{M}$ diagonalisierbar? Falls nein, begründen Sie! Falls ja, ermitteln Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für die $\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{S}$ diagonal ist!

3.) Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei symmetrisch, und alle ihre Koeffizienten seien reell. Beweisen Sie:

(i) Jeder Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist reell.

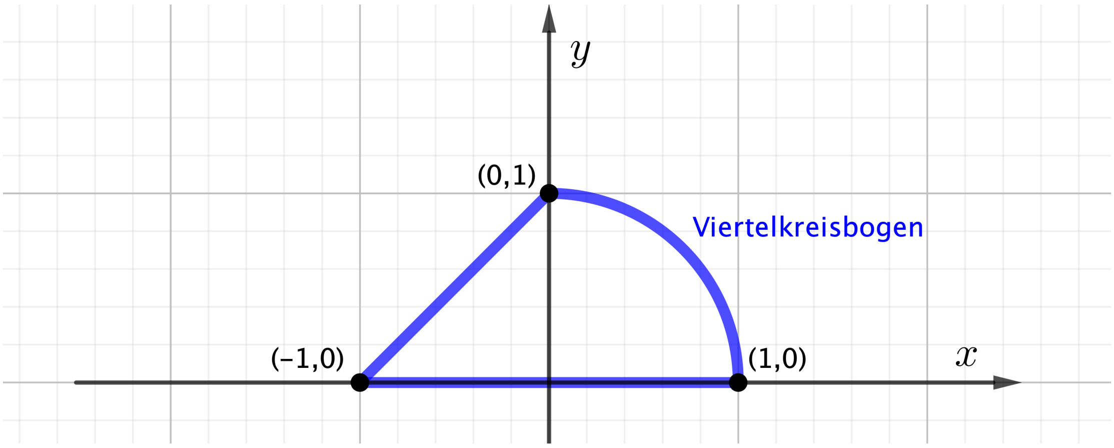
(ii) Zwei Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.

4.) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x(y^2 - 1) + x^2.$$

Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte von f.

5.) Sei F die zwischen den beiden Geradenstücken und dem Viertelkreisbogen eingeschlossene Fläche:



Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_F g \,\mathrm{d}A$, wobei $g(x,y) = xy$.

6.) Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\phi(x,y,z) = e^{2x-y} \sin z + 2z.$$

(i) Geben Sie die lineare Approximation $\phi_{\text{lin}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ von ϕ bei $P = (1, 2, \frac{\pi}{2})$ an.

(ii) Sei N die Niveaufläche von ϕ zum Niveau $\phi(P)$. Schreiben Sie N als Menge an und ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an N im Punkt P.