Zur Verfügung gestellt von:
Christian Spreitzer und Franz Embacher
PR Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt, WiSe 2020/21
LV-Nr.: 250027
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Universität Wien, WS 2020/21

# Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Schriftliche Online-Prüfung, 26.2.2021

Pro Aufgabe sind 8 Punkte zu erreichen, insgesamt also 48. Ist $m$ die erzielte Punktezahl zuzüglich Ihrer Bonuspunkte für die Samstag-Blöcke und $n = \min(m, 48)$, so gilt der folgende Notenschlüssel:

$n < 24 \Rightarrow$ Note: $5$
$24 \leq n < 30 \Rightarrow$ Note: $4$
$30 \leq n < 36 \Rightarrow$ Note: $3$
$36 \leq n < 42 \Rightarrow$ Note: $2$
$42 \leq n \leq 48 \Rightarrow$ Note: $1$

Bitte schreiben Sie leserlich mit einem dunklen Stift auf einem weißen (nicht-linierten und nicht-karierten) Papier! Gestalten Sie Ihre Berechnungen und Argumentationen so, dass sie gut nachvollziehbar sind!

**1.)** Sei $V$ der reelle Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad $\leq 2$. Zur Beschreibung linearer Abbildungen wird von der geordneten Basis $B = \big(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\big)$ zur geordneten Basis $C = \big(x \mapsto x, x \mapsto 1 + x^2, x \mapsto 1 - x^2\big)$ übergegangen.

(i) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix $S$ für diesen Übergang!

(ii) Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ werde bezüglich der Basis $B$ durch die Matrix $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dargestellt. Ermitteln Sie $[\varphi]_C$, d.h. die Matrixdarstellung von $\varphi$ bezüglich der Basis $C$.

**2.)** Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(i) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $\mathbf{A}$.

(ii) Ist $\mathbf{A}$ diagonalisierbar? Falls nein, begründen Sie! Falls ja, ermitteln Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, für die $\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}$ diagonal ist!

**3.)** Es sei $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie:

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{R}$ ist orthogonal, d.h. $\mathbf{R}$ ist invertierbar und es gilt $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. | $\iff$ | Die Spalten von $\mathbf{R}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. |

**4.)** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch entsprechende Rechnungen:

(i) Ist $f$ stetig?

(ii) Ist $f$ partiell differenzierbar? Falls ja, berechnen Sie $\mathbf{grad} f(0,0)$.

(iii) Ist $f$ differenzierbar?

**5.)** Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x + 2e^{2x}(1 + \cos y) = y' e^{2x} \sin y$$

für $y$ als Funktion von $x$.

(i) Zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine exakte Differentialgleichung handelt.

(ii) Finden Sie eine Lösung dieser Differentialgleichung. Die einzelnen Schritte, die zur Lösung führen, müssen ausreichend dokumentiert sein.

**6.)** Betrachten Sie die Punktmenge

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ und } y \geq 0\}.$$

(i) Skizzieren Sie $E$.

(ii) Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Kurve $\gamma$ mit Startpunkt $(2,0)$ an.

(iii) Sei $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 1-x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathrm{ds}.$$