Zur Verfügung gestellt von:
Christian Spreitzer und Franz Embacher
PR Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt, WiSe 2020/21
LV-Nr.: 250027
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Universität Wien, WS 2020/21

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Schriftliche Online-Prüfung, 13.4.2021

Pro Aufgabe sind 8 Punkte zu erreichen, insgesamt also 48. Ist m die erzielte Punktezahl zuzüglich Ihrer Bonuspunkte für die Samstag-Blöcke und $n = \min(m, 48)$, so gilt der folgende Notenschlüssel:

$n < 24 \Rightarrow$ Note: 5
$24 \le n < 30 \Rightarrow$ Note: 4
$30 \le n < 36 \Rightarrow$ Note: 3
$36 \le n < 42 \Rightarrow$ Note: 2
$42 \le n \le 48 \Rightarrow$ Note: 1

Bitte schreiben Sie leserlich mit einem dunklen Stift auf einem weißen (nicht-linierten und nicht-karierten) Papier! Gestalten Sie Ihre Berechnungen und Argumentationen so, dass sie gut nachvollziehbar sind!

1.) Sei V der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2, und sei $\phi : V \to V$ jene Abbildung, die jedem Polynom $p \in V$ das durch

$$\phi(p) : x \mapsto p(x) + p(3x)$$

definierte Polynom $\phi(p) \in V$ zuordnet.

(i) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist!

(ii) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der geordneten Basis $B = \big(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\big)$.

2.) Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(i) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $\mathbf{A}$.

(ii) Ist $\mathbf{A}$ diagonalisierbar? Falls nein, begründen Sie! Falls ja, ermitteln Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, für die $\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}$ diagonal ist!

3.) Es sei $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie:

(i) Für zwei $n \times n$-Matrizen A, B gilt stets $(AB)^T = B^T A^T$.

(ii) Für zwei $n \times n$-Matrizen A, B gilt stets $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

4.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

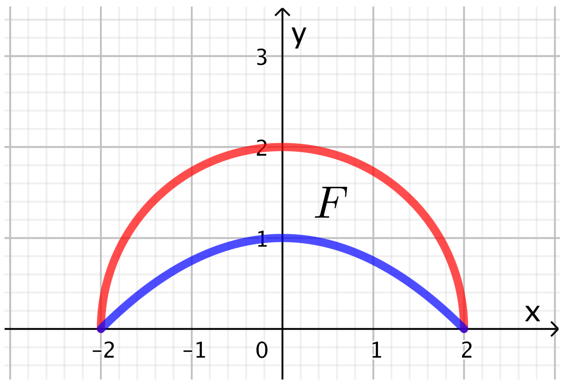
$$f(x,y) = e^{1-x+2y^2}.$$

(i) Geben Sie die lineare Approximation $f_{\text{lin}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f bei $P = (3,1)$ an.

(ii) Sei N die Niveaulinie von f zum Niveau $f(P)$. Skizzieren Sie diese Niveaulinie und geben Sie eine Parametrisierung $t \mapsto \gamma(t)$ von N an.

(iii) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Niveaulinie N im Punkt P.

5.) Betrachten Sie das zwischen der blauen Parabel und dem roten Halbkreis eingeschlossene Flächenstück F:



(i) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

(ii) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts von F.

6.) Seien $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2 \text{ und } z \ge 0\}$ und

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Beschreiben Sie die Gestalt von B mit alltagstauglichen Begriffen.

(ii) Berechnen Sie $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ und $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(iii) Berechnen Sie das folgende Volumsintegral mithilfe von Kugelkoordinaten:

$$\int_B \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V.$$