

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 1

1. In der Zeichenebene werden Vektoren als Pfeile interpretiert und durch „Aneinanderlegen“ addiert. Für die Addition von drei Pfeilen in der Zeichenebene gilt das Assoziativgesetz

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Gestalten Sie ein GeoGebra-Arbeitsblatt, das diesen Sachverhalt (ohne Rechnung, nur durch Pfeile-Aneinanderlegen) elementargeometrisch illustriert! (Besonders aussagekräftig ist so eine Visualisierung, wenn man die Pfeile \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} mit der Maus verändern kann.)

2. Nun wollen wir Punkte in der Ebene wie üblich durch Zahlenpaare beschreiben und mit ihnen *rechnen*. Für zwei Punkte A, B ist der Halbierungspunkt durch

$$H = \frac{1}{2}(A + B)$$

und für drei Punkte A, B, C , die ein Dreieck bilden, ist der Schwerpunkt durch

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

definiert. Beweisen Sie (durch Rechnung, ganz ohne Zeichnung): Das aus den Halbierungspunkten der Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ bestehende Dreieck (das sogenannte „Mittendreieck“), besitzt den gleichen Schwerpunkt wie das Dreieck $\triangle ABC$.

3. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zeigen Sie: Sind $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0, \end{aligned}$$

so ist auch die Summe $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$ und jedes Vielfache $\lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

4. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

- (i) Kann man \mathbf{a} als Linearkombination von \mathbf{u} und \mathbf{v} anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!
- (ii) Kann man \mathbf{a} als Linearkombination von \mathbf{u} und \mathbf{w} anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!

(iii) Kann man *jeden* Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von \mathbf{u} und \mathbf{v} anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie!

5. Harmonische Schwingungen mit Kreisfrequenz ω werden durch die Differentialgleichung

$$s''(t) + \omega^2 s(t) = 0$$

beschrieben. (Das bedeutet: Jede zweimal differenzierbare Funktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die diese Differentialgleichung erfüllt, ist eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω .) Zeigen Sie, *ohne* die Differentialgleichung zu lösen, dass mit je zwei Lösungen s_1 und s_2 auch die Summe $s_1 + s_2$ und jedes Vielfache λs_1 für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist!

6. Die Menge \mathbb{R}^2 aller reellen Zahlenpaare mit den Operationen

$$\text{„Addition“: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{„Multiplikation mit } \lambda \in \mathbb{R}\text{“: } \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_2 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix}$$

bildet *keinen* reellen Vektorraum. Gehen Sie die Vektorraum-Axiome (V1)–(V9) durch! Welche sind erfüllt, welche sind verletzt?

7. Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume des \mathbb{R}^3 und geben Sie jeweils eine Basis an!

(i) $U_1 :=$ Menge aller $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, für die gilt: $v_1 + 2v_2 = 3v_3$.

(ii) $U_2 :=$ Menge aller $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, für die gilt:

$$v_1 + 2v_2 = 3v_3 \quad \text{und} \quad 2v_1 + 4v_2 - 6v_3 = 0.$$

(iii) $U_3 := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

8. **K.O.-Aufgabe**¹: „Ich kann überprüfen, ob eine Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ linear unabhängig ist.“ Ein Kriterium für lineare Unabhängigkeit finden Sie auf Seite 558 des Buches.

¹Hierbei handelt es sich um eine **KOMPETENZ-ORIENTIERTE** Aufgabe, bei der es darum geht, die in der Aufgabe formulierte Kompetenz an der Tafel zu demonstrieren. Die konkrete Angabe erhalten Sie erst, wenn Sie zur Tafel gerufen werden. Natürlich werden die darin vorkommenden Zahlen so gewählt sein, dass sich etwaige Rechnungen leicht im Kopf ausführen lassen. Im Aufgabentext finden Sie ein Beispiel dafür, wie eine solche Angabe aussehen könnte.

Beispielaufgabe: Überprüfen Sie, ob die Menge $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig ist!

9. $\mathbb{R}[X]_2$ ist der aus allen reellen Polynomen vom Grad ≤ 2 bestehende Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.
 - (i) Bestimmen Sie seine Dimension!
 - (ii) Zeigen Sie, dass $B := \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ mit $\mathbf{q}_1 := 1 + X$, $\mathbf{q}_2 := 1 - X$ und $\mathbf{q}_3 := X^2$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$ ist!
 - (iii) Stellen Sie das Polynom $\mathbf{p} := 1 - X^2$ als Linearkombination der Basis B dar!
10. Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines \mathbb{K} -Vektorraums V , so ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ nicht notwendigerweise ein Untervektorraum von V . Geben Sie ein Beispiel!
11. Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines \mathbb{K} -Vektorraums V , so ist auch der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V .

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt Übungstermin 2

1. Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$x \mapsto a \sin(x + b) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

(ausgestattet mit den für Funktionen üblichen Operationen „Summe“ und „Multiplikation mit einer Zahl“) ein reeller Vektorraum ist und geben Sie eine Basis für ihn an!

Tipp: Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus einer Summe!

2. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und U ein Untervektorraum von V . Man nennt dann Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ zueinander äquivalent (Schreibweise $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$), wenn ihre Differenz in U liegt. Formal wird also definiert:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} :\Leftrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in U.$$

- (i) Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt:

- 1.) $\mathbf{u} \sim \mathbf{u}$.
- 2.) Aus $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ folgt $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}$.
- 3.) Aus $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ und $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ folgt $\mathbf{u} \sim \mathbf{w}$.

Anmerkung: Damit ist gezeigt, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse eines Vektors $\mathbf{v} \in V$, d.h. die Menge aller zu \mathbf{v} äquivalenten Vektoren, ist genau der affine Teilraum $\mathbf{v} + U$.

- (ii) Wie ist \sim für den Fall ($V = \mathbb{R}^3$, $U = z$ -Achse) geometrisch zu deuten?

3. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und U ein Untervektorraum von V . Weiters seien T_1 und T_2 affine Teilräume von V mit Richtung U . Wählt man $\mathbf{v}_1 \in T_1$ und $\mathbf{v}_2 \in T_2$, so kann man versuchen, mittels

$$(\mathbf{v}_1 + U) + (\mathbf{v}_2 + U) := (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + U$$

affine Teilräume zu addieren.

- (i) Zeigen Sie, dass diese Summenbildung von den gewählten Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 (den Repräsentanten von T_1 und T_2) nicht abhängt!
- (ii) Für den Fall ($V = \mathbb{R}^2$, $U =$ Gerade durch den Ursprung) machen Sie eine Skizze, die diese Unabhängigkeit von den Repräsentanten geometrisch illustriert!

4. **K.O.-Aufgabe:** „Ich kann für gegebene Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ berechnen.“

Beispielaufgaben:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, (-5 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \ -1)$$

5. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ihre Potenzen \mathbf{A}^2 , \mathbf{A}^3 und \mathbf{A}^4 ! Geben Sie ganz allgemein \mathbf{A}^r für $r \in \mathbb{N}$ an!¹ Was folgt daraus für die Potenzen der Matrix $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

6. **K.O.-Aufgabe:** „Ich kann den *Rang* einer Matrix bestimmen.“ Lesen Sie dazu im Buch ab Seite 522 nach, was der Rang einer Matrix ist.

Beispielaufgaben: Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Papier!

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Nachrechnen der Beziehung $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{E}_3$

- (i) auf dem Papier,
- (ii) mit Hilfe des Computeralgebra-Systems *Mathematica* oder mit *WolframAlpha*,
- (iii) mit Hilfe des Computeralgebra-Systems von *GeoGebra*.

(Informieren Sie sich bei Bedarf selbst über die Syntax dieser Programme für die Eingabe und Multiplikation von Matrizen!)

8. Beweisen Sie die Regel $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ für das Transponieren von Produkten von Matrizen!

9. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\mathbf{S}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Zeigen, Sie dass $\mathbf{S}_\alpha\mathbf{S}_\beta = \mathbf{S}_{\alpha+\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

10. Welche der folgenden Matrizen sind (i) symmetrisch, (ii) antisymmetrisch², (iii) orthogonal?

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \text{wobei } \mathbf{H} \text{ eine orthogonale } 2 \times 2\text{-Matrix ist.}$$

¹Im Buch wird die Konvention $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ verwendet (siehe Seite 33).

²Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *antisymmetrisch*, wenn $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 3

1. In der Physik besonders wichtig sind die drei komplexen Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Sie beschreiben die Komponenten des inneren Drehimpulses eines Spin-1/2-Teilchens in der nichtrelativistischen Quantentheorie.)

(i) Zeigen Sie, dass sie die Beziehungen $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$ und $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$ erfüllen!

(ii) Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{E}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ ist!

2. Für welche $d \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & d & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung?

3. **K.O.-Aufgabe:** „Ich kann die Determinante einer Matrix berechnen.“

Beispielaufgaben: Berechnen Sie jeweils die Determinante der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Wir bezeichnen die Spalten einer reellen 3×3 -Matrix \mathbf{A} mit \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} (in dieser Reihenfolge). Beweisen Sie, dass

$$\det(\mathbf{A}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

wobei \cdot das Skalarprodukt und \times das Vektorprodukt bezeichnet. Diese Größe wird auch das *Spatprodukt* der Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} genannt. Was ist seine geometrische Bedeutung?

5. Welche Werte kann die Determinante einer orthogonalen Matrix annehmen?

6. **K.O.-Aufgabe:** „Ich kann ermitteln, ob eine gegebene Matrix orthogonal ist.“

Beispielaufgabe: Ist die folgende Matrix orthogonal?

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

7. Eine *Permutationsmatrix* ist eine quadratische Matrix, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal die Eintragung 1 und sonst überall die Eintragung 0 enthält.

- (i) Was macht eine $n \times n$ -Permutationsmatrix \mathbf{P} mit den Komponenten eines Vektors $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, wenn sie auf diesen angewandt wird, d.h. wenn von \mathbf{u} zu $\mathbf{P}\mathbf{u}$ übergegangen wird? Woher haben Permutationsmatrizen ihren Namen?
- (ii) Argumentieren Sie, dass man jede $n \times n$ -Permutationsmatrix aus der $n \times n$ -Einheitsmatrix durch eine Abfolge von Vertauschungen von Spalten erhält.
- (iii) Argumentieren Sie, dass man jede $n \times n$ -Permutationsmatrix aus der $n \times n$ -Einheitsmatrix durch eine Abfolge von Vertauschungen von Zeilen erhält.
- (iv) Welche Werte kann die Determinante einer Permutationsmatrix annehmen?
- (v) Wieviele $n \times n$ -Permutationsmatrizen gibt es?

8. Das „Epsilon-Symbol“ ε_{jkl} für $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1 \\ \varepsilon_{jkl} &= 0 \text{ in allen anderen Fällen.} \end{aligned}$$

Nun seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ihr Vektorprodukt. Zeigen Sie, dass

$$w_j = \sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} u_k v_l \quad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

9. Zeigen Sie, dass die Determinante einer 3×3 -Matrix \mathbf{A} mit Komponenten a_{jk} mit Hilfe des in Aufgabe 8 definierten Epsilon-Symbols in der Form

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} a_{j1} a_{k2} a_{l3}$$

geschrieben werden kann, auf zweierlei Arten, und zwar

- (i) wahlweise durch Entwicklung nach der ersten Spalte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ oder indem Sie zeigen, dass die angegebene Beziehung die Regel von Sarrus ausdrückt.
- (ii) und (das ist die elegante Version) indem Sie (*ohne* die obige Summe explizit auszurechnen) zeigen, dass die rechte Seite der angegebenen Beziehung gleich dem Spatprodukt der Spalten von \mathbf{A} ist, vgl. mit Aufgabe 4!

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 4

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht? Begründen Sie!

$$(i) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \rho : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ 1 + z \end{pmatrix}$$

$$(iii) \sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$$

$$(iv) \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ 1 - 2t \end{pmatrix}$$

2. Verifizieren Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung an jener Ebene durch den Ursprung, die normal zum Vektor $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt, beschreibt!

3. Die Matrix $\mathbf{P} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gibt Anlass zur linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{P}\mathbf{v}$.

(i) Untersuchen Sie ihre Wirkung! Beschreiben Sie in Worten, wie $\mathbf{P}\mathbf{v}$ geometrisch aus \mathbf{v} hervorgeht! Machen Sie auch eine Skizze!

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ gilt!

(iii) Geben Sie einige andere Beispiele von linearen Abbildungen $V \rightarrow V$ an, die gleich ihrem Quadrat sind! Was haben sie alle im Hinblick auf wiederholtes Anwenden gemeinsam? Mit welchem Begriff sollte man derartige Abbildungen bezeichnen?

4. **K.O.-Aufgabe:** „Ich kann zu einer gegebenen linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bestimmen, sodass $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.“

Beispielaufgabe:

Für die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie \mathbf{A} , sodass $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

5. Für die mit Hilfe einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definierte lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ gilt:

$$\begin{aligned} e_1 &\mapsto 5e_1 + 2e_2 \\ e_2 &\mapsto 3e_1 - 7e_2, \end{aligned}$$

wobei e_1 und e_2 die Vektoren der Standardbasis des \mathbb{R}^2 sind. Bestimmen Sie \mathbf{B} .

6. **K.O.-Aufgabe:** „Ich kann Kern und Bild einer linearen Abbildung bestimmen und daran erkennen, ob die Abbildung injektiv/surjektiv ist.“

Beispielaufgabe:

Gegeben ist die lineare Abbildung $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

- (i) Bestimmen Sie den Kern von τ . Ist τ injektiv?
(ii) Bestimmen Sie das Bild von τ . Ist τ surjektiv?

7. Bestimmen Sie Kern und Bild der durch die Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ definierten linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, indem Sie

- (i) jeweils eine Basis dafür angeben
(ii) und diese beiden Untervektorräume mit Mitteln des Mathematikunterrichts charakterisieren!

8. Auf dem reellen Vektorraum \mathcal{P}_3 der Menge aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3 wird die Operation des Ableitens betrachtet: $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$, $D(p) := p'$. Bestimmen Sie Kern und Bild von D .

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 5

Da die im Buch verwendete Notation für Darstellungsvektoren und -matrizen handschriftlich etwas sperrig ist, wird die in der Vorlesung vereinbarte alternative Schreibweise: $[v]_B$ statt ${}_B v$ und $[\varphi]_{C,B}$ statt ${}_C M(\varphi)_B$ benutzt.

1. Geben Sie eine lineare Abbildung an, für die Kern und Bild identisch sind! Was passiert, wenn so eine Abbildung zweimal angewandt wird?

Tipp: Wie muss eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf die Vektoren der Standardbasis wirken, damit ihr Kern und ihr Bild gleich der x_1 -Achse sind?

2. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{K} und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie (und begründen Sie jeweils mit einem Beispiel oder mit einem Gegenargument), welche der folgenden Situationen möglich sind und welche nicht:

- (i) $\dim(V) < \dim(W)$ und φ ist surjektiv.
- (ii) $\dim(V) > \dim(W)$ und φ ist surjektiv.
- (iii) $\dim(V) < \dim(W)$ und φ ist injektiv.
- (iv) $\dim(V) > \dim(W)$ und φ ist injektiv.

3. **K.O.-Aufgabe:** „Ich kann zu einer durch eine Matrix gegebenen linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Darstellungsmatrix $[\varphi]_B$ von φ bezüglich einer gegebenen geordneten Basis B ermitteln.“

Beispielaufgabe: Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_B$ von φ bezüglich der geordneten Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{R}^2.$$

4. Gegeben ist die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\mathbf{x}$ mit

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix $[\psi]_{C,B}$ von ψ bezüglich der geordneten Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{R}^2 \text{ und } C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{R}^3.$$

5. Es sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 und $\chi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ die lineare Abbildung, die den quadratischen Term wegzwickelt, also

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \Rightarrow \quad (\chi(p))(x) = a_1x + a_0.$$

Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix von χ

- (i) bezüglich der geordneten Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ von \mathcal{P}_2
 - (ii) bezüglich der geordneten Basis $C = (x \mapsto x^2, x \mapsto x, x \mapsto 1)$ von \mathcal{P}_2
 - (iii) bezüglich der geordneten Basis $D = (x \mapsto 1, x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 + x + x^2)$ von \mathcal{P}_2 .
6. Es sei V der Vektorraum aller Polynomfunktionen $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 . Zeigen Sie, dass die Abbildung ρ , die jedem Polynom $p \in V$ die Funktion

$$(\rho(p))(x) = \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt$$

zuordnet, eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$ ist und ermitteln sie ihre Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

7. Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_B$ von φ bezüglich der geordneten Basis

$B = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von \mathbb{R}^2 . Interpretieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Wirkung von φ in Worten beschreiben! Illustrieren Sie mit einer Skizze! Vergleichen Sie die Determinante und die Spur¹ von A und $[\varphi]_B$.

8. Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bezüglich der geordneten Basis $B = (3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (mit $\mathbf{e}_j =$ Vektoren der geordneten Standardbasis) ist gegeben durch

$$[\omega]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\omega(\mathbf{e}_1)$, $\omega(\mathbf{e}_2)$, $\omega(\mathbf{e}_3)$ und die Darstellungsmatrix $[\omega]_E$ von ω bezüglich der geordneten Standardbasis $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

¹Die Spur einer quadratischen Matrix \mathbf{A} , bezeichnet mit $\text{Sp}(\mathbf{A})$, ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 6

1. Drehungen im \mathbb{R}^3 spielen u.a. in der Physik bei Koordinatentransformationen eine große Rolle. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix (bezüglich der Standardbasis) einer Drehung um den Winkel α um die x -Achse, und ebenso die Darstellungsmatrizen für entsprechende Drehungen um die y - bzw. z -Achse.

Hinweis: In den Spalten einer Matrix stehen die Bilder der Basisvektoren.

2. In Aufgabe 9 von Blatt 2 wurde gezeigt, dass für Drehmatrizen $\mathbf{S}_\alpha \in \text{SO}(2)^1$ gilt, dass $\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}_\beta = \mathbf{S}_{\alpha+\beta} = \mathbf{S}_{\beta+\alpha} = \mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt also $\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}_\beta = \mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\alpha$, d.h. Drehungen im \mathbb{R}^2 kommutieren (die Reihenfolge ist egal) und bilden damit eine Abelsche Gruppe. Gilt dies auch für (beliebige) Drehungen im \mathbb{R}^3 , ist also auch die $\text{SO}(3)$ eine Abelsche Gruppe? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

3. Auf dem reellen Vektorraum \mathcal{P}_2 der Menge aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 wird die Operation des Ableitens betrachtet: $D : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $D(p) := p'$.

- (i) Geben Sie $[D]_{B,B}$ für die geordnete Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ an!
- (ii) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass $[D^2]_{B,B} = [D]_{B,B}^2$ und $[D^3]_{B,B} = [D]_{B,B}^3$ gilt!
- (iii) Sei q die durch $q(x) = 3x^2 - 5x + 7$ gegebene Polynomfunktion. Bestimmen Sie $[q]_B$ und $[q']_B$ und stellen Sie die Beziehung

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 7) = 6x - 5$$

in Matrixform bezüglich der geordneten Basis B dar!

4. Seien \mathcal{P}_2 , D und B wie in Aufgabe 3. Es wird nun auch eine andere geordnete Basis von \mathcal{P}_2 betrachtet: $C = (x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 - x, x \mapsto x^2)$.

- (i) Bestimmen Sie $[D]_{C,C}$.
- (ii) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix S .
- (iii) Verifizieren Sie durch explizite Berechnung mit den Ergebnissen von (i) und (ii), dass $[D]_{C,C} = S^{-1} [D]_{B,B} S$ gilt!

¹ $\text{SO}(n)$ ist die Gruppe der speziellen orthogonalen $n \times n$ -Matrizen, $\text{SO}(n) := \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}_n \text{ und } \det \mathbf{A} = 1\}$.

5. Sei V der reelle Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 und sei $\varphi : V \rightarrow V$ jene lineare Abbildung, die jedem Polynom $p \in V$ das Polynom

$$\varphi(p) : x \mapsto p(x - 1)$$

zuordnet. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

6. Sei V wie in Aufgabe 5 und sei $\psi : V \rightarrow V$ jene lineare Abbildung, die jedem Polynom $p \in V$ das Polynom

$$\psi(p) : x \mapsto p'(x)(x - 1)$$

zuordnet. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von ψ bezüglich der geordneten Basis $C = (x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 - x, x \mapsto x^2)$.

7. Sei V der Vektorraum aller Funktionen der Form

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (a + bx + cx^2)e^x.$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, und sei $\chi : V \rightarrow V$ jene lineare Abbildung, die jeder Funktion $f \in V$ ihre Ableitung f' zuordnet. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von χ bezüglich der geordneten Basis $B = (x \mapsto e^x, x \mapsto x e^x, x \mapsto x^2 e^x)$.

8. Seien V und W Vektorräume über \mathbb{K} , $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Der \mathbb{K} -Vektorraum aller linearen Abbildungen $V \rightarrow W$ werde mit $\text{Hom}(V, W)$ bezeichnet. Weiters sei B eine geordnete Basis von V und C eine geordnete Basis von W .

- (i) Beweisen Sie, dass für beliebige lineare Abbildungen φ und ψ von V nach W und für beliebige $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$[\varphi + \psi]_{C,B} = [\varphi]_{C,B} + [\psi]_{C,B} \quad \text{und} \quad [\lambda \varphi]_{C,B} = \lambda [\varphi]_{C,B}.$$

Formulieren Sie diese zwei Beziehungen in Worten!

Damit ist gezeigt, dass die Abbildung

$$\Phi : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}, \quad \Phi(\chi) := [\chi]_{C,B}$$

linear ist. Ist sie

- (ii) surjektiv?
- (iii) injektiv?
- (iv) bijektiv?

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 7

1. Für $0 < \alpha < \pi$ sei die Matrix $S_\alpha := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ gegeben.

- (i) Die Matrix S_α werde als Element von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ aufgefasst. Sie beschreibt dann eine Drehung um den Winkel α . Berechnen Sie ihre Eigenwerte! Ist sie diagonalisierbar?
- (ii) Die Matrix S_α werde als Element von $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ aufgefasst. Berechnen Sie ihre Eigenwerte! Ist sie diagonalisierbar?

2. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- (i) über \mathbb{R} , d.h. für den Fall, dass sie als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgefasst wird,
- (ii) über \mathbb{C} , d.h. für den Fall, dass sie als lineare Abbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ aufgefasst wird.

3. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & -1 \end{pmatrix}$.

6. Sei $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte dieser Matrix (über \mathbb{C}) unter Zuhilfenahme der Ergebnisse der Aufgaben 2 und 3, ohne eine weitere Rechnung durchzuführen!

7. Die Eigenwerte von 2×2 -Matrizen lassen sich mit den (über \mathbb{C} geltenden) Identitäten

Summe der Eigenwerte = Spur der Matrix

Produkt der Eigenwerte = Determinante der Matrix

manchmal durch reine Kopfrechnung ermitteln. Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen über \mathbb{C} , ohne eine Rechnung auf dem Papier zu machen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Auf dem reellen Vektorraum \mathcal{P}_2 der Menge aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 wird die lineare Abbildung: $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $(T(p))(x) := x p'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T

- (i) durch direktes Arbeiten mit Polynomfunktionen,
- (ii) mit Hilfe der Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

Anmerkungen: Um die Wirkung dieser linearen Abbildung prägnanter auszudrücken, können Sie statt T auch $x \frac{d}{dx}$ schreiben. Die hier auftretenden Eigenvektoren sind Elemente von \mathcal{P}_2 , also Funktionen, und werden daher auch *Eigenfunktionen* genannt.

9. Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{K} eine Äquivalenzrelation ist! Schreiben Sie $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, wenn es eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{S}$ und zeigen Sie, dass für beliebige $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

- 1.) $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$,
- 2.) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$,
- 3.) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \sim \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.

10. Mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ berechnen Sie $e^{\alpha \mathbf{A}}$.

11. Sei $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- (i) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenräume von \mathbf{B} .
- (ii) Ist \mathbf{B} diagonalisierbar? Falls nein, begründen Sie! Falls ja, ermitteln Sie eine Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, für die $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{S}$ diagonal ist!

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 8

1. Ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2$$

ein euklidisches Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 ? Begründen Sie!

2. Ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \text{Sp}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$$

(Sp = Spur) ein euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n \times n}$? Begründen Sie!

3. Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension n . Eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *lineares Funktional* auf V . Die Menge aller linearen Funktionalen auf V wird der *Dualraum* von V genannt und mit dem Symbol V^* bezeichnet. Er ist ebenfalls ein \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension n .

Zeigen Sie: Für jedes $\rho \in (\mathbb{R}^n)^*$ existiert ein $\mathbf{u}_\rho \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei \cdot das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n bezeichnet. (Das bedeutet, dass die Wirkung von ρ als „bilde das Skalarprodukt mit \mathbf{u}_ρ “ beschrieben werden kann.) Zeigen Sie weiters, dass \mathbf{u}_ρ durch ρ eindeutig bestimmt ist!

4. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gilt:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \right).$$

5. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gilt:

$$2 \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \right) = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

Was bedeutet das für die Geometrie des Parallelogramms?

(Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelogrammgleichung>.)

6. Der Untervektorraum U von \mathbb{R}^4 sei definiert als die Menge aller $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, für die gilt: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ und $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Geben Sie eine ON-Basis von U und eine ON-Basis von U^\perp an!

Achtung: Hier kommen keine „schönen Zahlen“ heraus. Für die nötigen Operationen mit Vektoren können Sie bei Bedarf ein CAS verwenden!

7. Der Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynomfunktionen $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 sei mit dem euklidischen Skalarprodukt

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} := \int_{-1}^1 \mathbf{p}(x) \mathbf{q}(x) dx$$

ausgestattet. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ mit $\mathbf{u}_j : x \mapsto x^j$ (für $j = 0, 1, 2$) an, um eine Orthonormalbasis von \mathcal{P}_2 zu finden!

Kommen die Polynome, die Sie auf diese Weise erhalten, irgendwo im Buch vor?

8. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum der Dimension n , und seien $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n \in V$. Zeigen Sie: Falls

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_j) \mathbf{d}_j = \mathbf{v} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in V,$$

so ist $\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n\}$ eine ON-Basis von V .

Anmerkung: Die angegebene Beziehung heißt „Vollständigkeitsrelation“. Ihre unendlichdimensionale Verallgemeinerung spielt in der Theorie der Hilberträume, die in der Quantenphysik zur Anwendung kommt, eine wichtige Rolle.

9. Und nun zum Abschluss eine Aufgabe, die in einem unendlichdimensionalen Vektorraum¹ spielt: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$] - \pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2.$$

- (i) Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe! Gehen Sie dabei so vor wie im Buch auf S. 743 f beschrieben! Um Konvergenzfragen müssen Sie sich nicht kümmern. Die Reihe, die Sie erhalten, konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ gegen $f(t)$. Sie können dabei die folgenden unbestimmten Integrale benutzen:

$$\int t^2 \sin(kt) dt = \frac{2t \sin(kt)}{k^2} - \frac{(k^2 t^2 - 2) \cos(kt)}{k^3} + C \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$\int t^2 \cos(kt) dt = \frac{2t \cos(kt)}{k^2} + \frac{(k^2 t^2 - 2) \sin(kt)}{k^3} + C \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

- (ii) Plotten Sie den Graphen von f und den Graphen der Partialsumme der Fourierreihe bis zum Glied mit $k = 5$.
- (iii) Setzen Sie in der Fourierreihe $t = \pi$, um den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ zu berechnen!

¹Für den Zweck dieser Aufgabe ist es nicht wichtig, um welchen unendlichdimensionalen Vektorraum es sich genau handelt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, der Fourierreihenentwicklung einen Vektorraum zugrunde zu legen. Wichtig ist hier lediglich, dass f stetig und stückweise differenzierbar ist. Für jede solche Funktion f konvergiert die Fourierreihe von f punktweise gegen f . Mehr zu Fourierreihen finden Sie bei Interesse im Kapitel 30 des Buchs.

Freiwillige Zusatzaufgaben:

Falls Sie Ihr Können noch anhand zweier Anwendungsaufgaben erproben wollen (sie zählen nicht zu den offiziellen Aufgaben für die Übungen), die auch illustrieren, wozu die Diagonalisierung von Matrizen in der Praxis dienen kann, hier sind zwei:

- (A) Ein harmonischer Oszillator (man kann dabei an ein nicht allzu stark ausgelenktes Pendel denken) wird durch eine Differentialgleichung vom Typ $y''(t) = -k y(t)$ beschrieben, wobei die Konstante $k > 0$ charakterisiert, wie stark der Oszillator an die Gleichgewichtslage $y = 0$ gebunden ist. Werden zwei solche Oszillatoren (mit Auslenkungen y_1 und y_2) durch eine elastische Kraft aneinander gekoppelt, so wird das Gesamtsystem durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1''(t) &= -k y_1(t) + w (y_2(t) - y_1(t)) \\y_2''(t) &= -k y_2(t) - w (y_2(t) - y_1(t))\end{aligned}$$

beschrieben. Dabei charakterisiert die Konstante $w \geq 0$ die Stärke der Kopplung. Fasst man die Auslenkungen der beiden Oszillatoren zu einem zeitabhängigen Vektor

$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ zusammen, so kann das obige Differentialgleichungssystem in Matrixform als $\mathbf{y}''(t) = -\mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ geschrieben werden.

- (i) Bestimmen Sie die Matrix \mathbf{A} .
 - (ii) Argumentieren Sie, dass \mathbf{A} diagonalisierbar ist!
 - (iii) Die Oszillatoren führen eine „Eigenschwingung“ aus, wenn $\mathbf{y}(t) = f(t) \mathbf{u}$, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und \mathbf{u} ein (zeitunabhängiger) Eigenvektor von \mathbf{A} ist. Bestimmen $\mathbf{y}(t)$ für alle Eigenschwingungen! Sie können dabei die Tatsache benutzen, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $g''(t) = -c g(t)$ für $c > 0$ durch $g(t) = a \sin(\sqrt{c}t) + b \cos(\sqrt{c}t)$ mit frei wählbaren Konstanten a und b gegeben ist.
 - (iv) Stellen Sie sich die Oszillatoren als zwei nebeneinander hängende Pendel vor (y_1 und y_2 sind dann ihre Auslenkwinkel), die mit einer elastischen Feder miteinander verbunden sind. Die Feder ist entspannt, wenn die Auslenkwinkel gleich sind, d.h. wenn $y_1 = y_2$ ist. Wie sehen dann die Eigenschwingungen aus, wenn man ihnen zuschaut?
- (B) Bei einer bestimmten Tierart haben die Weibchen einen ein- bis zweijährigen Reproduktionszyklus. Ein Weibchen, das weniger als ein Jahr alt ist, wird „nulljährig“ genannt. Ein Anteil von $\frac{5}{16}$ aller nulljährigen Weibchen stirbt am Ende des Jahres, die anderen sind im darauffolgenden Jahr „einjährig“. Ein nulljähriges Weibchen bekommt im Mittel $\frac{3}{5}$ Nachkommen, ein einjähriges bekommt im Mittel $\frac{4}{5}$ Nachkommen. Noch ältere Weibchen bekommen keine Nachkommen mehr. Wir nummerieren die Jahre mit $k \in \mathbb{N}_0$. Wird die Anzahl der nulljährigen Weibchen im Jahr k mit $z_0(k)$ bezeichnet und die Anzahl der einjährigen Weibchen mit $z_1(k)$, so genügt die Populationsentwicklung dem

Differenzgleichungssystem

$$\begin{aligned}z_0(k+1) &= \frac{3}{5}z_0(k) + \frac{4}{5}z_1(k) \\z_1(k+1) &= \frac{11}{16}z_0(k)\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Ermitteln Sie die Lösung dieses Systems zu vorgegebenen Anfangswerten $z_0(0)$ und $z_1(0)$ mit folgender Methode:

- (i) Fassen Sie $z_0(k)$ und $z_1(k)$ zu einem Vektor $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^2$ zusammen und schreiben Sie das obige Differenzgleichungssystem in Matrixform $\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{B}\mathbf{z}(k)$ an! Die Lösung des Problems kann nun formal als $\mathbf{z}(k) = \mathbf{B}^k \mathbf{z}(0)$ geschrieben werden.
- (ii) Nun stehen zwei Verfahren zur Wahl. Variante 1: Sie diagonalisieren die Matrix \mathbf{B} , um \mathbf{B}^k für $k \in \mathbb{N}_0$ explizit zu berechnen. Variante 2: Sie schreiben $\mathbf{z}(0)$ als Linearkombination der Eigenvektoren, um $\mathbf{B}^k \mathbf{z}(0)$ zu berechnen, *ohne* zuvor \mathbf{B}^k berechnet zu haben. Wählen Sie eine der beiden Varianten und ermitteln Sie die gesuchte Lösung!
- (iii) Untersuchen Sie das Langzeitverhalten (d.h. das Verhalten für $k \rightarrow \infty$) der Lösung! Wie wird sich das Verhältnis der Anzahl der nulljährigen Weibchen zur Anzahl der einjährigen Weibchen einpendeln?

Für die nötigen Matrizenoperationen, die man im Prinzip auch auf dem Papier ausführen kann, können Sie bei Bedarf ein CAS verwenden.

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 9

1. Transformieren Sie die Quadrik

$$\frac{8}{5}x^2 + \frac{12}{5}xy + \frac{17}{5}y^2 + 24x + 28y - 56 = 0$$

durch eine Drehung und eine Verschiebung auf Koordinaten, in denen offensichtlich ist, um welche Art von Punktmenge es sich handelt (d.h. bringen Sie die Quadrik mittels einer Hauptachsentransformation in Normalform)! Sie können zur Berechnung der entsprechenden Drehmatrix ein CAS verwenden.

2. Stellen Sie die Graphen der folgenden Funktionen für konkrete Parameterwerte $a, b, c \in \mathbb{N}$ dar (Sie können dazu Technologie einsetzen, z.B. den Befehl `Kurve` in GeoGebra oder den Befehl `Plot3D` in WolframAlpha/Mathematica), beschreiben Sie den jeweiligen Graph in Worten und erklären Sie, was die einzelnen Parameter bedeuten.

(i) $h : [-\pi c, \pi c] \rightarrow \mathbb{R}^3, h(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = a \cos(b\sqrt{x^2 + y^2})$

(iii) $g : \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq a\} \rightarrow \mathbb{R}, g(\mathbf{x}) = a - \sqrt{a^2 - \|\mathbf{x}\|^2}$ (wobei $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$).

3. Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils die Niveaulinien (Höhenlinien) zu den Funktionswerten (Höhen) 1, 2 und 3 und machen Sie jeweils eine Skizze!

(i) $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u(x, y) = 2x + 3y.$

(ii) $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, v(x, y) = x^2 + y^2.$

(iii) $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, w(x, y) = y^2 - x.$

4. Skizzieren oder plotten Sie nachstehende Folgen im \mathbb{R}^2 und geben Sie den Limes an:

(i) $\mathbf{a}^{(k)} = \left(1, \frac{(-1)^k}{k}\right).$

(ii) $\mathbf{b}^{(k)} = \left(\frac{\cos \varphi}{k}, \frac{\sin \varphi}{k}\right)$ für ein festes $\varphi \in [0, 2\pi[.$

(iii) $\mathbf{c}^{(k)} = \left(\frac{\cos(\frac{k\pi}{6})}{k}, \frac{\sin(\frac{k\pi}{6})}{k}\right).$

5. Ermitteln Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{a}^{(k)}), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{b}^{(k)}),$

wobei $(\mathbf{a}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ und $(\mathbf{b}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ die in Aufgabe 4 definierten Folgen sind.

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right).$

6. Wo sind die folgenden Funktionen stetig? Geben Sie eine kurze Begründung!

(i) $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(x, y) = (2xy^2 - 3y)e^{-x^2}$

(ii) $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(x, y, z) = \frac{\sin(xy) + \cos(yz)}{1 + x^2 + z^2}$

(iii) $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(x, y) = x^2 + y \operatorname{sgn}(x),$ wobei $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$

7. Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R},$

$$F(x, y, z) = \sqrt{5 + x^2} + \frac{y^3}{z}.$$

Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}F(x, y, z)$ und die Richtungsableitung im Punkt $P = (2, 1, 1)$ in Richtung des Vektors $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$

8. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig ist (z.B. indem Sie zu Polarkoordinaten übergehen oder eine Nullfolge $(\mathbf{a}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ finden, für die $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{a}^{(k)}) \neq f(0, 0)$). Ist f partiell differenzierbar?

9. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{x-2y} + 3xy^2$$

im Punkt $Q = (2, 1, f(2, 1)).$

10. Sei $\alpha \in \mathbb{R}.$ Betrachten Sie die Funktion

$$\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\alpha$$

(i) Für welche Werte von α lässt sich ω zu einer auf ganz \mathbb{R}^2 stetigen Funktion $\tilde{\omega}$ fortsetzen?

(ii) Für welche Werte von α ist $\tilde{\omega}$ im Punkt $(0, 0)$ differenzierbar?

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 10

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ x^2y \\ \ln(1+x^2) \end{pmatrix}.$$

2. Seien $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_3^4.$$

Bilden Sie $h := g \circ f$ und berechnen Sie die Ableitung von h einmal „direkt“ und einmal, indem Sie $g \circ f$ mithilfe der Kettenregel differenzieren.

3. Seien $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Betrachten Sie das Parameterintegral

$$I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

und berechnen Sie $\frac{d}{dt}I(t)$. Setzen Sie dazu

$$H(u_1, u_2, u_3) := \int_{u_1}^{u_2} f(x, u_3) dx, \quad g(t) := \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ t \end{pmatrix},$$

sodass $I(t) = H \circ g(t)$ und verwenden Sie die Kettenregel.

Hinweis: Die hier beschriebene Situation wird im Buch in Abschnitt 24.4 diskutiert.

4. Lösen Sie die (exakte) Differentialgleichung

$$x^2 \sin(y) y'(x) - 2x \cos(y) = 0.$$

Hinweis: Exakte Differentialgleichungen werden im Buch ab Seite 896 behandelt.

5. Lässt sich die durch den Punkt $P = (1, 1)$ verlaufende Höhenlinie der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

in einer Umgebung von P als Funktion $x \mapsto y(x)$ darstellen? Falls ja, berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion bei $x = 1$.

Hinweis: Der Hauptsatz über implizite Funktionen wird im Buch in Abschnitt 24.5 behandelt.

6. Plotten Sie die Funktion aus Aufgabe 5 (z.B. mit WolframAlpha) und klassifizieren Sie alle kritischen Punkte. Zur Bestimmung der Definitheit der Hessematrix finden Sie ein Merkblatt in Moodle.

7. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z.$$

8. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = (x + 2y)^2 + (3y + z)^2.$$

9. Welche Punkte der Parabel $y = x^2 - 2$ liegen dem Ursprung $(0, 0)$ am nächsten? Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Arten:

- (a) Die Methode, die man in der Schule anwenden würde:

Zielfunktion, zunächst in zwei Variablen: $f(x, y) = \text{Abstand}(\text{squadrat})$ von (x, y) zum Ursprung.

Nebenbedingung: $g(x, y) = 0$ (Parabelgleichung).

Man löst die Nebenbedingung nach einer Variable auf, setzt in $f(x, y)$ ein und erhält eine Zielfunktion in nur einer Variablen, die (nicht ganz korrekt) meist ebenfalls mit f bezeichnet wird.

- (b) Alternative Methode: Zeichnen Sie die Parabel und alle Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung, die die Parabel berühren!

Argumentieren Sie, dass die Gradienten der Funktionen f und g in den Berührungspunkten zueinander parallel sind.

Lösen Sie daher das Gleichungssystem

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \lambda \mathbf{grad} g(x, y)$$

$$g(x, y) = 0$$

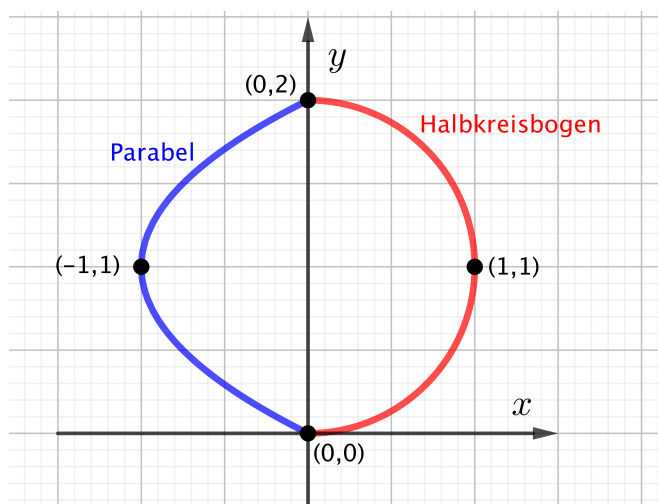
nach (x, y, λ) .

Sie können sich hier z.B. vorstellen, Sie würden auf dem Graphen von f marschieren, und zwar genau entlang eines durch die Bedingung $g(x, y) = 0$ definierten Pfades. Wie verhält sich Ihr Pfad zur lokalen Höhenlinie an seinen tiefstgelegenen Stellen?

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 11

1. Berechnen Sie die iterierten Integrale $\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \cos(2x-y) \, dy \, dx$ und $\int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \cos(2x-y) \, dx \, dy$.
2. Sei A das Rechteck $[1, 2] \times [0, 2] \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Flächenintegral $\int_A x_2 e^{x_1 x_2} \, d(x_1, x_2)$.
3. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ das von den Graphen der Funktionen $x \mapsto x^3$ und $x \mapsto x^2$ eingeschlossene Flächenstück. Skizzieren Sie die Situation und berechnen Sie $\int_B (x-y) \, d(x, y)$.
4. Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$. Skizzieren Sie G und berechnen Sie das Integral¹ $J := \int_G \frac{\sin y}{y} \, d(x, y)$.
5. Sei G das zwischen der Parabel und dem Halbkreisbogen eingeschlossene Flächenstück:

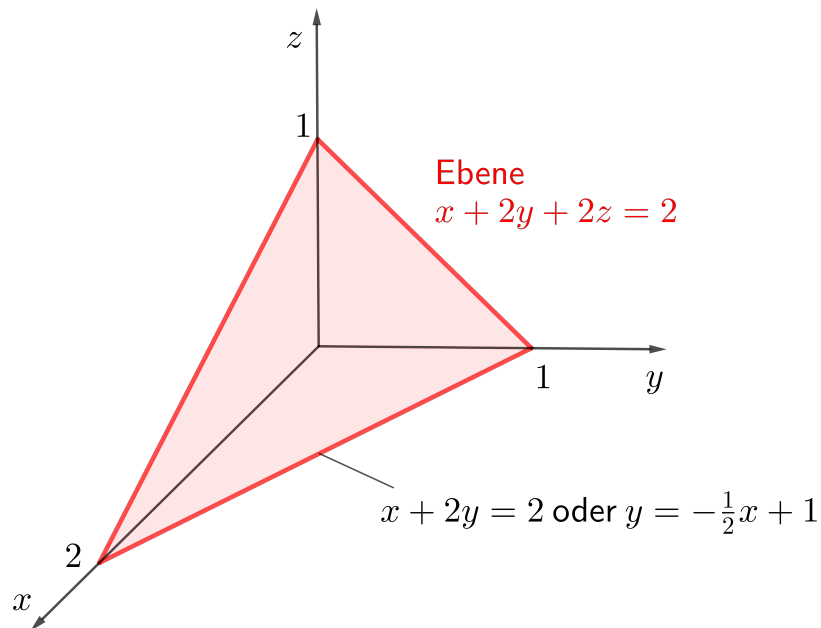


Berechnen Sie das Integral $\int_G f \, dA$, wobei $f(x, y) = x$.

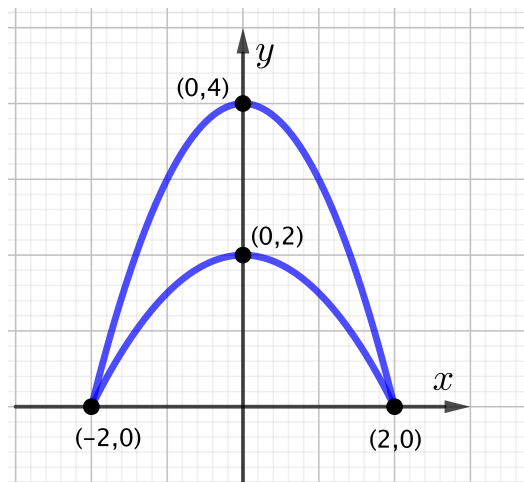
¹Hinweis: Der Integrand $(x, y) \mapsto \frac{\sin y}{y}$ lässt sich zu einer stetigen Funktion auf ganz \mathbb{R}^2 fortsetzen, Sie können J nach dem Satz von Fubini also als iteriertes Integral berechnen, wobei die Integrationsreihenfolge keine Rolle spielt (und die eine eventuell günstiger als die andere ist).

6. Berechnen Sie das Volumen des Gebiets

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 2z \leq 2\}.$$



7. Berechnen Sie den Schwerpunkt des von den beiden Parabeln eingeschlossenen Flächenstücks:



8. Bestimmen Sie das Volumen einer Viertelkugel mit Radius R durch Integration in Kugelkoordinaten.
9. Bestimmen Sie das Volumen eines Drehkegels mit Höhe H und Radius R durch Integration in geeigneten Koordinaten.
10. Lassen Sie die Figur aus Aufgabe 7 gedanklich um die y -Achse rotieren und bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 12

1. Sei $B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^\alpha & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) Für welche Werte von α existiert das Integral $\int_B \omega \, dV$?

(ii) Für welche Werte von α existiert das Integral $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} \omega \, dV$?

Tipp: Wählen Sie für die Integration Koordinaten, die den Symmetrieeigenschaften von ω angepasst sind.

2. Betrachten Sie die Funktion $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, \infty)$, $\rho(\mathbf{v}) = N e^{-\frac{m\|\mathbf{v}\|^2}{2kT}}$, wobei m , k und T positive Konstanten sind. Bestimmen Sie N , sodass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{v}) \, d^3v = 1 \quad \text{gilt}^1 \quad \text{und in weiterer Folge das Integral} \quad \bar{v} := \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v}\| \rho(\mathbf{v}) \, d^3v.$$

Sie können dabei verwenden, dass $\int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} \, dv = \sqrt{\frac{\pi}{16\alpha^3}}$ und $\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} \, dv = \frac{1}{2\alpha^2}$.

3. Schreiben Sie als Kurven mit einer geeigneten Parameterdarstellung an:

(a) Im \mathbb{R}^2 den Polygonzug von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ und weiter nach $(1, -1)$.

¹Die so normierte Funktion ρ lässt sich als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren. Da sie kugelsymmetrisch ist, können wir die Winkelintegration sofort ausführen und erhalten $\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{v}) \, d^3v = \int_0^\infty 4\pi N v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \, dv$, wobei $v := \|\mathbf{v}\|$. Die Funktion $v \mapsto 4\pi N v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ mit passender Normierungskonstante N ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der sogenannten Maxwell-Boltzmann-Verteilung, die die statistische Verteilung des Betrags der Teilchengeschwindigkeiten eines idealen Gases im thermischen Gleichgewicht beschreibt. Bedeutung der Konstanten: m ist die Masse eines Teilchens, T ist die Temperatur des Gases, $k = 1.38064852 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ist die Boltzmannkonstante. Der Erwartungswert $\bar{v} := \langle \|\mathbf{v}\| \rangle$ ist die mittlere (betragsmäßige) Geschwindigkeit eines Teilchens. Anmerkung für Physiker*innen: Die Wahrscheinlichkeit, ein physikalisches System bei vorgegebener Temperatur T in einem Zustand der Energie E vorzufinden, ist stets proportional zu $e^{-\frac{E}{kT}}$ (dies ist der sogenannte Boltzmannfaktor).

(b) Im \mathbb{R}^2 die Ellipse $16x^2 + 9y^2 = 1$, im Uhrzeigersinn mit Anfangspunkt = Endpunkt $= (0, \frac{1}{3})$ durchlaufen.

(c) Im \mathbb{R}^3 eine Linie auf der Einheitskugel, die spiralförmig vom Südpol ausgeht, sich in vielen Windungen über die Südhalbkugel auf den Äquator zubewegt, diesen überquert, sich auf der Nordhalbkugel auf den Nordpol zubewegt und schließlich in ihm endet (mit anderen Worten: eine Linie, die die Einheitskugel „umspinnt“).

Tipp: „Denken“ Sie in Kugelkoordinaten!

4. Die Gleichung $x + y = e^{x-y}$ beschreibt eine Linie in der Ebene. Man möchte sie gern plotten, aber die Gleichung kann weder nach x noch nach y durch eine geschlossene Formel aufgelöst werden. Charakterisieren Sie die Linie als Kurve mittels einer geeigneten Parameterdarstellung (in der nur geschlossene Formeln auftreten sollen, die man dann in *GeoGebra* oder *Mathematica* eingeben kann)!

Probieren Sie zuerst ein bisschen, bevor Sie sich diesen Tipp ansehen:

Setzen Sie $y = x - t$ als Parameter t an!

5. Eine an den Enden aufgehängte Kette, die unter dem Einfluss der Schwerkraft durchhängt, beschreibt eine Kettenlinie; diese Kurve begegnet uns auch bei Hochspannungsleitungen (siehe Abbildung 1). Das Bild der parametrisierten Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$$

ist eine Kettenlinie zwischen den Aufhängungspunkten $P_1 = (0, 1)$ und $P_2 = (1, \cosh(1))$. Berechnen Sie die Länge dieser Kette(nlinie) und ermitteln Sie eine Parametrisierung nach der Bogenlänge.²



Abbildung 1: Kettenlinie, Foto von Kamel15, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons; Hochspannungsleitung, Foto von Kreuzschnabel, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

²Wissenswertes zu Hyperbelfunktionen finden Sie hier: <https://de.wikipedia.org/wiki/Hyperbelfunktion>

6. Eine Kardioide oder Herzkurve entsteht, wenn man einen Kreis auf der Außenseite eines gegebenen festen Kreises mit gleichem Radius abrollen lässt und dabei einen bestimmten Punkt auf dem abrollenden Kreis verfolgt (siehe Abbildung 2). Bei geeigneter Position der Lichtquelle kann eine Kardioide als Kaustik in einem Kaffeehägerl beobachtet werden (häufiger handelt es sich aber um eine Nephroide).

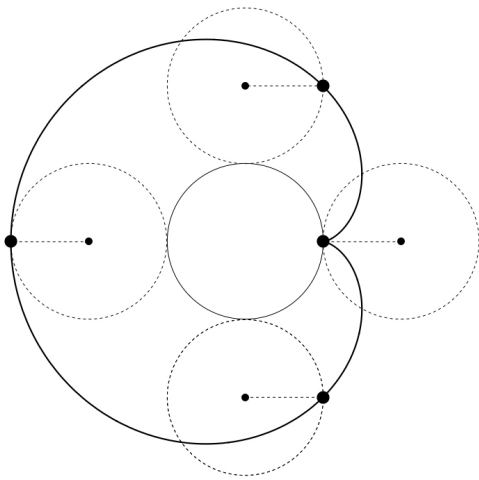


Abbildung 2: Kardioide; Kaffeehägerl-Kaustik

Die Parameterdarstellung einer Kardioide in kartesischen Koordinaten lautet

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2a(1 - \cos t) \cos t \\ 2a(1 - \cos t) \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

in Polarkoordinaten ist ihre Darstellung $r(\varphi) = 2a(1 - \cos \varphi)$ (der Winkel φ wurde hier als Parameter verwendet).

Berechnen Sie die Länge dieser Kardioide und ihren Flächeninhalt. Sie können für die konkrete Rechnung auch ein CAS verwenden.

7. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t) =: \mathbf{x}(t)$ eine zweimal differenzierbare Kurve. Zeigen Sie: Die Vektoren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ stehen genau dann für alle $t \in [a, b]$ aufeinander normal, wenn der Parameter t (bis auf eine etwaige additive Konstante) proportional zur Bogenlänge ist. Wenden Sie diesen Sachverhalt auf folgende Frage an: Wie muss die Bewegung eines Punktteilchens im Raum beschaffen sein, damit der Beschleunigungsvektor stets normal zur Bewegungsrichtung ist?

Tipp: Berechnen Sie $\frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$.

8. Zeigen Sie, dass sich die Krümmung einer ebenen Kurve nicht ändert, wenn die Kurve um einen beliebigen Winkel gedreht wird! Sei dazu $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweimal differenzierbare Kurve, R eine 2×2 -Rotationsmatrix und $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch $\tilde{\mathbf{x}}(t) := R \mathbf{x}(t)$ definierte gedrehte Kurve.

Zeigen Sie, dass $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(t)$ für alle $t \in (a, b)$.

9. Ein (punktförmig angenommenes) Fahrzeug fährt geradeaus, dann in eine Kurve und danach wieder geradeaus. Zur Zeit t befindet es sich am Ort $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$. Wie bekannt, ist $\dot{\mathbf{x}}(t)$ die (vektorielle) Momentangeschwindigkeit und $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ die (vektorielle) Momentanbeschleunigung zur Zeit t . Die dritte Ableitung $\dddot{\mathbf{x}}(t)$ heißt „Ruck“ (englisch *jerk*). Warum? Wieso spielt diese Größe und eine Kurve namens Klothoide beim Straßen- und Schienenbau eine Rolle? Siehe dazu auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Ruck>, <https://de.wikipedia.org/wiki/Klothoide> und <https://www.amazon.com/dp/B07KW7XFX1>.
10. Einer Kardioide (die einen Spezialfall einer Epizykloide darstellt) verwandte Kurven sind Epitrochoiden, die entstehen, wenn ein Kreis mit Radius r außen auf einem feststehenden Kreis mit Radius R abrollt. Wir verfolgen dabei einen in Bezug auf den rollenden Kreis fixierten Punkt P (siehe Abbildung 3). Die Parameterdarstellung einer allgemeinen

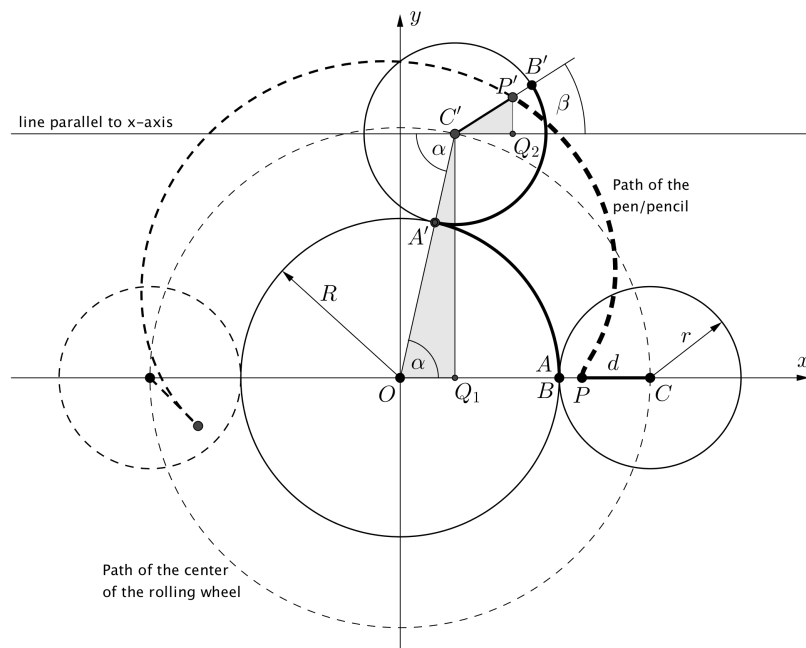


Abbildung 3: Epitrochoide

Epitrochoide lautet

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= (R + r) \cos \alpha - d \cos\left(\frac{R+r}{r} \alpha\right), \\ y(\alpha) &= (R + r) \sin \alpha - d \sin\left(\frac{R+r}{r} \alpha\right), \end{aligned}$$

wobei α der in Abbildung 3 eingezeichnete Winkel ist. Plotten Sie diese Kurve mit *GeoGebra* (Befehl *Kurve*) unter Verwendung von Schieberegler für die Parameter r , R und d (Intervall für α hinreichend groß wählen, damit sich eine geschlossene Kurve ergibt). Variieren Sie diese Parameter und fügen Sie Ihrer Abgabe ein Bild jener Epitrochoide bei, die Ihnen am besten gefällt.

Anmerkungen: Epitrochoiden und Hypotrochoiden sind genau jene Kurven, die sich mit einem Spirograph erzeugen lassen: <https://nathanfriend.io/inspirograph/>.

Weitere interessante Kurven findet man etwa im Famous Curve Index: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/>