Zur Verfügung gestellt von:
Ulisse Stefanelli
UE Analysis, SoSe 20
LV-Nr.: 250028
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Analysis, SS 2015

Ulisse Stefanelli

4. April 2020

1 Wiederholung

1. Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Folgen

$$a_n = n^2 \cosh(1/n), \quad b_n = \ln(\ln(n))/n, \quad c_n = (2^n - n^2)/n!,$$

2. Stellen Sie Beispiele von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vor, sodass

   (a) f ist strict monoton und hat kritische Punkte,

   (b) f hat kritische Punkte, die keine lokalen Maximumstellen bzw. Minimumstellen sind,

   (c) f hat lokale Maximumstellen bzw. Minimumstellen, die keine kritische Punkte sind,

   (d) f ist monoton und periodish,

   (e) f ist ungerade, nicht konstant und 0 ist eine lokale Maximumstelle oder eine lokale Minimumstelle,

   (f) f ist gerade und 0 ist keine lokalen Maximumstelle bzw. Minimumstelle.

3. Richtig oder falsch? Geben Sie einen Beweis oder stellen Sie ein Gegenbeispiel vor:

   (a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade $\Rightarrow f - g$ gerade

   (b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade $\Rightarrow f - g$ ungerade

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist gerade

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist gerade

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist ungerade

   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und differenzierbar $\Rightarrow f'$ ist ungerade

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch und differenzierbar. Beweisen Sie, dass f unendliche viele kritische Punkte hat.

5. Berechnen Sie die folgenden Limes

   (a) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{(\arctan(\sin(x^2)))^2}{(\cos x)^2 - 1}$,

(b) $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{t\,\mathrm{Sh}\,(1/t^2)}{1/t}$,

(c) $\lim_{y\to 0^+} \dfrac{\sin^2 y + \ln(1-y^2)}{1-\cos(2y)}$,

(d) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

6. Seien $f(x) = 5-8x-2e^{5x}$, $g(x) = e^{-8(x+1)} - \arctan(8(x+1)) - x$, für $x \in \mathbb{R}$, und seien f^{-1} und g^{-1} die entsprenchenden Umkehrfunktionen (untersuchen Sie die Existenz solcher Umkehrfunktionen nicht). Berechnen Sie
$$\frac{2}{(f^{-1})'(3)} + \frac{1}{(g^{-1})'(2)}.$$

7. Zeichnen Sie den Graph von
$$f_\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} x^3 - \lambda x + \lambda & \text{se } \; |x| < 1 \\ \dfrac{4}{\pi}\arctan(\lambda x) & \text{se } \; |x| \geq 1 \end{cases}$$
für verschiedene Werte von $\lambda > 0$. Für welchen λ hat man $f_\lambda \in C^0(\mathbb{R})$ bzw. $f_\lambda \in C^1(\mathbb{R})$?

2 Unbestimmte Integration

8. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen
$$\int \frac{x^2 \arctan(x^3)}{1+x^6}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}, \quad \int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + x}\mathrm{d}x$$

9. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und beschränkt. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen
$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^2+1}\mathrm{d}x, \quad \int f(x)f'(x)\cos((f(x))^2)dx, \quad \int f'(f(x))f'(x)dx.$$

10. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen
$$\int x\,\mathrm{Ch}x\,\mathrm{d}x, \quad \int \sin x\,\mathrm{Sh}x\,\mathrm{d}x.$$

11. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen
$$\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x, \quad \int x^n \sin x\,\mathrm{d}x \;\; (n \in \mathbb{N}).$$

3 Riemannsche (oder bestimmte) Integration

12. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} C[a,b] &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist stetig}\}, \\ R[a,b] &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist riemannintegrierbar}\}. \end{aligned}$$

Seien $f,\ g,\ h : [0,1] \to [0,1]$, sodass $f \in R[0,1]$, $g \in C[0,1]$, und h streng monoton wachsend ist. Richtig oder falsch?

(a) $g \circ g - h \circ h \in R[0,1]$.

(b) $f \circ f \notin R[0,1]$.

(c) $f - f^+ + \sup f \in R[0,1]$.

(d) $\tan \circ h \in R[0,1]$.

13. Stellen Sie Beispiele vor:

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R} :\ f \notin R[0,1]$ und $f \in R[0,b]\ \forall b \in (0,1)$.

(b) $g \notin R[0,1]$, sodass $g^+ + 2g^- \in R[0,1]$.

(c) $h \in R[0,1]$ mit endliche viele Unstetigkeitsstellen.

(d) $\ell \in R[0,1]$ mit unendliche viele Unstetigkeitsstellen.

14. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R},\ x_0 \in [a,b],\ f \in R[a,b],\ f = g \ \text{ in } [a,b] \setminus \{x_0\}$$

$$\Longrightarrow\ g \in R[a,b] \text{ und } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \text{ konvex } \quad \Longrightarrow \quad f \in R[a,b].$$

16. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f \in R[-a,a] \text{ und ungerade } \quad \Longrightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

17. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x\,\mathrm{d}x,\ \int_0^{4\pi} \sin(x/2)\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x \sin x\,\mathrm{d}x,\ \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\ \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \mathrm{Ch}\, x\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle(a > 0) \int_a^{2a} \ln(x/a)\,\mathrm{d}x,\ \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int_0^a \frac{x}{a}\left(\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{a^2}\right)\mathrm{d}x.$

18. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

    (a) $\int_0^2 (x+3x^+)\mathrm{d}x,\ \int_{-1}^1 \lfloor 2x \rfloor\,\mathrm{d}x,\ \int_0^3 2x - \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x,$

    (b) $\int_{-\pi}^{\pi} (\pi-|x|)^2\mathrm{d}x,\ \int_{-1}^1 \sqrt{1-|x|}\,\mathrm{d}x,\ \int_0^2 \min\{x,1\}\,\mathrm{d}x,$

    (c) $\int_{-2}^2 \left(\sqrt{4-x^2} - (1-|x|)^+\right)\mathrm{d}x,\ \int_{-10}^{10} \lfloor (\cos x)^+ \rfloor \mathrm{d}x,\ \int_0^2 \left(\int_0^x t^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$

19. Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien $f \in C(a,b)$, $g,h \in C^1(a,b)$, und $x_0 \in (a,b)$. Dann ist die Funktion
$$\ell(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t$$
in $C^1(a,b)$ und
$$\ell'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

4 Uneigentliche Integration

20. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:
$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\pi^2+x^2}, \quad \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x.$$

21. Betrachten Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent, uneigentlich konvergent, oder nicht konvergent sind:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(-e^x)}{\sin(1/x)}\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} x^{10}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

22. Betrachten Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent, uneigentlich konvergent, oder nicht konvergent sind:
$$\int_1^{+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x}\mathrm{d}x,$$
(Hinweis: Integralkriterium für Reihen und Cauchykriterium).

23. Stellen Sie die folgenden Beispiele vor:

    (a) $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, sodass $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ nicht existiert,

    (b) $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, f nicht beschränkt,

    (c) $f \notin R[0,1]$, sodass $f \in R[0,\alpha]$ für alle $\alpha \in (0,1)$,

    (d) $f \in C[0,+\infty)$, $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, und f nicht beschränkt.

24. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f \in C^1(a,b),\ x_0 \in (a,b)\ \Rightarrow\ \forall x \in (a,b) : f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

25. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \ell = 0.$$

5 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

26. Stellen Sie Beispiele vor:
    (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{g} 0$.
    (b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{p} 0$ aber $f_n \not\xrightarrow{g} 0$.
    (c) $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{g} 0,\ g_n \xrightarrow{p} 0$, aber $f_n g_n \not\xrightarrow{g} 0$.
    (d) $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_n,\ g_n \xrightarrow{p} 0,\ f_n g_n \xrightarrow{g} 0$.
27. Berechnen Sie den Limes der Funktionenfolge $f_n(x) = (\sin x)^n + 3x^n$. Konvergiert sie punktweise oder gleichmäßig in $A = [0,1]$, $B = [0,2]$, $C = (-1.5, 0]$?
28. Berechnen Sie den Limes der folgenden Funktionenfolgen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \arctan(nx), \quad f_n(x) = \arctan(x/n), \quad f_n(x) = n\arctan(x/n).$$

    Konvergieren sie punktweise oder gleichmäßig?
29. Beweisen Sie die folgenden Sätze, oder stellen Sie ein Gegenbeispiel vor.
    (a) $f_n,\ f \in R[0,+\infty),\ f_n \xrightarrow{p} f\ \Rightarrow\ \int_0^{+\infty} f_n \to \int_0^{+\infty} f$.
    (b) $f_n,\ f \in R[0,+\infty),\ f_n \xrightarrow{g} f\ \Rightarrow\ \int_0^{+\infty} f_n \to \int_0^{+\infty} f$.
30. Berechnen Sie die Summe der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k/(k+1)!$
31. Berechnen Sie die Summe der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{+\infty} (1/2)^k/k$.

6 Taylorpolynome, Taylorreihen und Fourierreihen

32. Berechnen Sie die McLaurinpolynome mit Grad 7 der folgenden

$$a : x \mapsto 2\cos x, \quad b : x \mapsto \cos(x^2), \quad c : x \mapsto (\cos x)^2, \quad d : x \mapsto \cos(\pi + \sin x).$$

33. Seien $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und p das Taylorpolynom von f mit Grad 6 und Entwicklungspunkt x_0. Richtig oder falsch? Beweisen Sie oder stellen Sie Gegenbeispiele vor.

$$\text{a) } p^{(5)}(x_0) = f^{(5)}(x_0), \quad \text{b) } p^{(5)}(0) = f^{(5)}(0), \quad \text{c) } p^{(7)}(x_0) = 0.$$

34. Seien $f : x \mapsto 7x^2\cos(x^3) + x\sin(7x^8)$ und p ihr MacLaurinpolynom mit Grad 11. Welchen Wert hat $p'(1)$?

35. Seien $f : x \mapsto e^{-6x^6} + 6\sin(x^2)$ und p ihr MacLaurinpolynom mit Grad 8. Welchen Wert hat $p'(-1)$?

36. Sei $f : x \to x/(1+x^3)$. Schreiben Sie die entsprechende McLaurinreihe und betrachten ihre Konvergenz.

37. Sei $f : x \to x\ln(1+x)$. Schreiben Sie die entsprechende McLaurinreihe und betrachten ihre Konvergenz.

38. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \in [-\pi, 0)$ und $f(x) = 1$ für $x \in [0, \pi)$.

39. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi)$.

40. Sei $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \exp(i\alpha x)$ für $x \in [-\pi, \pi)$.

7 Topologische Grundbegriffe

41. Welche von diesen sind metrische Räume?

    (a) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = (x - y)^2$,
    (b) $X = [0, 2\pi)$, $d(x, y) = |e^{ix} - e^{iy}|$,
    (c) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = x - y$,
    (d) $X = \mathbb{R}^2$, $d(v, w) = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2$,
    (e) $X = \mathbb{R}^2$, $d(v, w) = |2v_1 - w_1| + |2v_2 - w_2|$,
    (f) $X = \mathbb{R}^2$, $d(v, w) = \min\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|\}$.

42. Welche von diesen sind metrische Räume?

    (a) $X = \{a, b, c\}, d(a, b) = d(b, a) = d(a, c) = d(c, a) = 1, d(b, c) = d(c, b) = 1/3,\ d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$,
    (b) $X = \{\text{alle endliche Submenge von } \mathbb{N}\}$, $d(A, B) = |A\Delta B|$ (zur Erinnerung: $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$),
    (c) $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $d(n, m) = |n^{-1} - m^{-1}|$ für $n,\ m \in \mathbb{N}$, $d(\infty, \infty) = 0$, $d(n, \infty) = d(\infty, n) = n^{-1}$ für $n, \in \mathbb{N}$.

43. Welche von diesen sind metrische Räume?

    (a) $X = \{f : [0, 1] \to [0, 1] \ \text{ stetig}\}$, $d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$,
    (b) $X = \{f : [0, 1] \to [0, 1] \ \text{ stetig}\}$, $d(f, g) = |f(1/2) - g(1/2)|$,

(c) $X = C[0,1]$, $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$.

44. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass die Abbildung $D : (x,y) \in X \times X \mapsto \min\{1, d(x,y)\}$ eine Metrik definiert.

45. Sei (X,d) ein metrischer Raum und seien A, $B \subset X$. Richtig oder falsch?

    (a) $A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B$,

    (b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \partial A \cap \partial B = \emptyset$,

    (c) $\partial B \subset A \subset B \Rightarrow \partial B \subset \partial A$,

    (d) $A \neq \emptyset$, $\inf\{d(a,B)\ |a \in A\} = 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

46. In $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ betrachten wir die Submenge

$$A = \{xy = 1\}, \quad B = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ x < 1\}, \quad C = \{|x| \leq |y| \leq |x|/2\}, \quad D = \{|xy| \leq 1\}.$$

    Welche sind offen, abgeschlossen, beschränkt?

47. Stellen Sie Beispiele in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ vor:

    (a) $A \subset \mathbb{R}^2$ offen, nicht abgeschlossen, nicht beschränkt.

    (b) $B \subset \mathbb{R}$, sodass $B \times B \subset \mathbb{R}^2$ nicht offen und nicht abgeschlossen ist.

    (c) $C \subset \mathbb{R}^2$ offen, abgeschlossen und beschränkt.

48. In $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ betrachten wir die Submenge

$$\begin{aligned} A &= \{f \in X \mid f \text{ konstant}\}, \\ B &= \{f \in X \mid f \text{ beschränkt}\}, \\ C &= \{f \in X \mid f \text{ differenzierbar in } (0,1) \text{ und } f' = f\}. \end{aligned}$$

    Welche sind offen, abgeschlossen, beschränkt?

49. Seien $p, q \in [1, \infty]$ und $O \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$O \ \text{ is offen in } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \iff O \ \text{ is offen in } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q).$$

50. Sei $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists a_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, \ldots, n_\varepsilon : \ Q \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(a_i).$$

51. Stellen Sie Beispiele vor:

    (a) (X,d) beschränkt, nicht vollständig.

    (b) (X,d) nicht beschränkt, vollständig.

    (c) (X,d) nicht beschränkt, nicht vollständig.

52. Sei der metrische Raum $(X,d) = (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ gegeben. Stellen Sie Beispiele vor:

(a) $A \subset X$ offen, beschränkt.

(b) $B \subset X$ nicht beschränkt, vollständig.

(c) $C \subset X$ abgeschlossen, beschränkt.

53. Beweisen Sie den *Satz vom abgeschlossenen Graphen.*

    Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume mit Y kompakt. Dann:
    $f : X \to Y$ stetig $\iff$ $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \,:\, y = f(x)\}$ abgeschlossen

54. Gilt den Satz vom abgeschlossenen Graphen ohne die Kompaktheit Voraussetzung?

55. Stellen Sie Beispiele in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ (falls sie existieren) vor:

    (a) A kompakt mit $\partial A = A$.

    (b) B absgeschlossen und nicht beschränkt mit $B \cap \{|x| < k\}$ kompakt für alle $k > 0$.

    (c) $C \neq \emptyset$ und offen mit $C \cap \{|x| < k\}$ kompakt für alle $k > 0$.

    (d) $D \neq \overline{D}$ mit $\overline{D}$ kompakt.

56. Zeigen Sie durch die Definition die Stetigkeit der folgenden funktionen

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, -x)$ (Rotation).

    (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = y - x$.

    (c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = \min\{|x|, |y|\}$.

57. Zeigen Sie, dass $z_n = \mathrm{e}^{in} \in \mathbb{C}$ konvergente Teilfolgen hat. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ beliebig. Existiert eine Teilfolge z_{n_k} mit $z_{n_k} \to z$ (heuristich)?

58. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und nicht leer. Beweisen Sie, dass

    (a) $K \times K \in \mathbb{R}^2$ kompakt ist,

    (b) $K \times (\mathbb{R} \setminus K) \in \mathbb{R}^2$ nicht kompakt ist,

    (c) $2K = \{2x \in \mathbb{R} \,:\, x \in K\}$ kompakt ist,

    (d) $K - K = \{x - y \in \mathbb{R} \,:\, x,\, y \in K\}$ kompakt ist.

59. Bestimmen sie die Operatornorm der Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(v) = Av$, wobei A die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
ist. Zeigen Sie, dass $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1$ existiert, sodass $\|L(v)\|_2 = \|L\|_{\mathrm{Op}}$ ist.

8 Funktionen mehrerer Variabeln

60. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen (aller Ordnungen) der Funktion $f(x,y,z) = x^2 \sin y\, \mathrm{e}^{-z}$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

61. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y,z) = z^2 + \log(x^2+y^2)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \,:\, z \in \mathbb{R}\}$. Sind diese stetig?

62. Sei $p \in [1,\infty]$. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(v) = \|v\|_p$ partiell differenzierbar? Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(v) = \|v\|_q^q$ für $q \in [1,\infty)$ partiell differenzierbar?

63. Berechnen Sie die ersten und die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ist $\partial^2_{xy} f(0,0) = \partial^2_{yx} f(0,0)$? Wieso?

64. Sei $r(x) = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie $\nabla r(x)$ und $\Delta r(x)$.

65. Für alle $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar definieren wir $\nabla_{(x,y)} f = (\partial_x f, \partial_y f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $\nabla_{(x,y)} \cdot v = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\Delta_{(x,y)} f = \nabla_{(x,y)} \cdot (\nabla_{(x,y)} f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

    Sei $O = \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \in \mathbb{R}^3$ und $u : (x,y,t) \in O \to \mathbb{R}$ definiert durch

    $$u(x,y,t) = t^{-1} \exp(-(x^2+y^2)/4t).$$

    Zeigen Sie, dass

    $$\nabla_{(x,y)} u(x,y,t) = -(xu(x,y,t), yu(x,y,t))/(2t)$$

    und dass u die Wärmeleitungsgleichung

    $$\partial_t u = \Delta_{(x,y)} u$$

    für alle $(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$ erfüllt.

66. Geben Sie Beispiele von Funktionen $f,\ g,\ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass

    $$\nabla \cdot f(x,y,z) = 1+x, \quad \nabla g(x,y,z), = (2xy\mathrm{e}^{z^2}, x^2\mathrm{e}^{z^2}, 2x^2yz\mathrm{e}^{z^2}), \quad \Delta h(x,y,z) = \nabla \cdot (\nabla h)(x,y,z) = 1.$$

67. Existiert $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, sodass $\nabla g(x,y,z) = (x, yz, z)$?

68. Berechnen Sie den Differential von $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (xz^2, \cos z + \mathrm{e}^y)$. Sei L_{x_0} der Differential von f in $x_0 = (1,0,\pi)$. Welchen Wert hat $L_{x_0}(1,2,3\pi)$?

69. Für alle $k \in \mathbb{N}$ finden Sie Beispiele von Funktionen

    (a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die C^k sind aber nicht $k+1$-mal partiell differenzierbar sind,

    (b) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die C^k aber nicht C^{k+1} sind,

    (c) $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die $k+1$-mal partiell differenzierbar aber nicht C^{k+1} sind,

70. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ sei $u : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \|x\|_2^{2-n}$. Beweisen Sie, dass $\Delta u = 0$.

71. Sei $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto \ln \|x\|_2$. Beweisen Sie, dass $\Delta u = 0$.

72. Sei $w \in C^3(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta w = 0$. Beweisen Sie, dass
$$w \text{ konstant } \Leftrightarrow \Delta(w^2) = 0.$$

73. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x, y) = x \cos y$ gegeben. Berechnen Sie die folgenden Integrale
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial\phi}{\partial x}(\xi, 0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^\pi \frac{\partial\phi}{\partial y}(1, \eta)\,\mathrm{d}\eta$,
   (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial\phi}{\partial y}(0, \eta)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^1 \frac{\partial\phi}{\partial x}(\xi, 1)\,\mathrm{d}\xi$,

74. Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := x^2 + 6xy + y^2$ im Punkt $(1, 1)$ in Richtung zum Punkt $(2, 4)$.

75. Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$ in einem Punkt $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ in Richtung zum Ursprung.

76. Ermittlen Sie die Gleichung $z = g(x, y)$, die die Tangentialhyperebene an den Graphen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^2 + \sin y$ im Punkt $(1, \pi)$.

77. Man berechne die Gleichung der Tangentialhyperebene an der Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$, in einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$, wo f differenzierbar ist.

78. Wie lautet das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := 2ye^x + y^2$ im Punkt $(0, 2)$?

79. Finden Sie die kritischen Punkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (y-x^2)(y-2x^2)$. Welche von diesen sind lokale Extrema?

80. Finden und klassifizieren Sie die kritischen Punkte von
   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
   (b) $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$,
   (c) $f(x, y) = x^3 - 4y^3 + 3x^2 - y^4$.

81. Man untersuche folgende Funktionen auf Extrema:
   (a) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 + 3xy$,
   (b) $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.