Analysis in einer Variable für das Lehramt — Probeprüfung am 5.6.2023

Name, Vorname ____________ Matrikelnummer ____________

Unterschrift ____________

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC/Netz, kein Taschenrechner, keine KI, keine Gruppenarbeit.

Jede Übung 1.-10. hat genau eine richtige Antwort: a, b, c oder d. Die Antworten zu Ü11. und Ü12. sind ganze Zahlen.

Tragen Sie alle an Antworten am Ende dieser Seite ein.

Übungen 1.-10.: Für jede Antwort: Richtig = +3 Punkte, Leer = 0, Falsch= −1 Punkt.
Übungen 11.-12.: Für jede Antwort: Richtig = +5 Punkte, Leer = 0, Falsch= −2 Punkte.

Bis 14 Punkten: Note 5. 15-19 Punkte: Note 4. 20-24 Punkte: Note 3. 25-29 Punkte: Note 2. 30-40 Punkte: Note 1.

1. Seien A, $B \subset \mathbb{Q}$ nicht leer und $C = \{ab \ : \ a \in A, \ b \in B\}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ C ist beschränkt. $\boxed{\mathbf{b}}$ $0 \in C$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sqrt{2} \notin C$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $C = \mathbb{Q}$.

2. Welche Aussage ist eine Tautologie? $\boxed{\mathbf{a}}$ $\neg(p \Rightarrow p)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\neg p \Rightarrow p$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\neg p \Rightarrow \neg p$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $p \Rightarrow \neg p$.

3. Sei $a_n \to 1$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\exists n \in \mathbb{N} : \ a_n > 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n > 0$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists n \in \mathbb{N} : \ a_n = 1$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq 2$.

4. Seien (a_n) und (b_n) Nullfolgen mit $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall n \in \mathbb{N} : \ (a_n \geq 0) \wedge (b_n \geq 0)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $a_n/b_n \to 1$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists n \in \mathbb{N} : \ (a_n \geq 0) \vee (b_n \geq 0)$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $(a_n + b_n)$ ist beschränkt.

5. Sei $A = \{p/q \ : \ p, q \in \mathbb{N}, \ 1 \leq p < q\}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\min A = 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\max A = 1$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sup A = 1$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sup A = +\infty$.

6. Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a_n \to \ell$ und $b_n = a_{f(n)}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $b_n \to f(\ell)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $b_n \to \ell$. $\boxed{\mathbf{c}}$ (b_n) ist eine Teilfolge von (a_n). $\boxed{\mathbf{d}}$ (b_n) ist beschränkt.

7. Sei $0 \leq a_n \leq 2^{-n}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq 2$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq 1/2$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konvergiert nicht.

8. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall x \in [0,1] : \ f(x) \leq 10x$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\forall x \in (0,1] : \ f(x) > \ln x$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists x \in [0,1] : \ f(x) \geq \mathrm{e}^x$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\exists x \in [0,1] : \ f(x^2) = x$.

9. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $f(0) \neq 0$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\forall x \in (0,1] : \ f(x) \neq f(0)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\forall x \in [0,1] : \ f(x) \neq 0$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\exists x \in (0,1] : \ f(x) = f(0)$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\exists x \in (0,1) : \ f(x) \neq 0$.

10. Seien $A = [0,1]$, $B = (-1,1)$, $A^c = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \notin A\}$ und $B^c = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \notin B\}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $A \cap B$ ist abgeschlossen. $\boxed{\mathbf{b}}$ $A^c \cap B$ ist offen. $\boxed{\mathbf{c}}$ $A^c \cup B$ ist abgeschlossen. $\boxed{\mathbf{d}}$ $A^c \cap B^c$ ist offen.

11. Sei
$$A = \Big\{\alpha > 0 \ : \ \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{n+1} < +\infty\Big\}.$$
Welchen Wert hat $5 \sup A - 2 \inf A$?

12. Sei $\beta \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} \beta x^3 - \beta^2 & \text{für } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{\beta x} + 2\beta & \text{für } x > 0, \end{cases}$$
stetig ist und sei $s = \sum_{n=1}^{+\infty} (\beta/2)^n$. Welchen Wert hat $9s$?

Zur Verfügung gestellt von:
Ulisse Stefanelli
PR Analysis in einer Variable, SoSe 2023
LV-Nr.: 250166
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Antworten:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.