Zur Verfügung gestellt von:
Ulisse Stefanelli
UE Analysis in einer Variable, SoSe 2023
LV-Nr.: 250167
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen: Analysis in einer Variable für das Lehramt, SS23

Ulisse Stefanelli

22. August 2023

1 Wiederholung

1. Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktionen:

   (a): $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$, (b): $x \in \mathbb{R} \mapsto -\sin x$, (c): $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(-x)$,
   (d): $x \in \mathbb{R} \mapsto -\sin(-x)$, (e): $x \in \mathbb{R} \mapsto (\sin x) + 2$, (f): $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x+2)$,
   (g): $x \in \mathbb{R} \mapsto 2\sin x$, (h): $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)$, (i): $x \in \mathbb{R} \mapsto |\sin x|$,
   (l): $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(|x|)$, (m): $x \in \mathbb{R} \mapsto |\sin(|x|)|$, (n): $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2)$.

2. Lösen Sie folgende Gleichungen:

   (a) $2x + 1 = 0$, (b) $x^2 - x = 1$, (c) $x^2 - 4x + 4 = 0$, (d) $x^2 - x + 2 = 0$,
   (e) $x^3 = x$, (f) $x^3(x-1) = 0$, (g) $x^4 = 16$, (h) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

3. Lösen Sie folgende Ungleichungen:

   (a) $2x + 1 \leq 0$, (b) $x^2 - x > 1$, (c) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$, (d) $x^2 - x + 2 \geq 0$,
   (e) $x^3 \leq x$, (f) $x^3(x-1) < 0$, (g) $(x-2)(x+3) \geq 0$, (h) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \leq 0$.

4. Lösen Sie folgende Systeme:

   $$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{array} \right. , \quad \text{(b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 1 \end{array} \right. , \quad \text{(c)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y = 0 \\ 2x - y = -1 \end{array} \right. ,$$

5. Lösen Sie folgende Gleichungen und Ungleichungen:

   (a) $\sin(x) = 0$, (b) $\cos(x) = \sqrt{3}/2$, (c) $\sin(x) \geq \sqrt{2}/2$, (d) $\sin(x)\cos(x) < 0$.

2 Logik, Mengen, Zahlen

6. Seien p, q und r Aussagen. Benutzen Sie die Methode der Wahrheitstefel, um den Wert folgender Aussagen zu bewerten

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & p \Rightarrow (q \wedge r), \\ \text{(b)} & (p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r), \\ \text{(c)} & \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r, \\ \text{(d)} & p \Leftrightarrow \neg q \end{array}$$

7. Seien p, q und r Aussagen. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen Tautologien sind

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & p \vee (\neg p \vee q), \\ \text{(b)} & (\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge q), \\ \text{(c)} & \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q), \\ \text{(d)} & \neg\Big[\big((p \wedge r) \wedge \neg q\big) \vee \big(q \vee \neg(p \wedge r)\big)\Big] \Rightarrow \big((q \wedge (p \vee \neg q)) \Rightarrow \neg p\big). \end{array}$$

8. Sei $\star$ eine Operation, die durch die folgende Wahrheitstafel definiert ist:

p	q	$p \star q$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Drücken Sie $p \star q$ mit Hilfe der Negation $(\neg)$ und der Konjunktion $(\wedge)$ aus.

9. Berechnen Sie folgende

$$\text{(a)}: \quad 4!, \quad \text{(b)}: \quad \binom{4}{1}, \quad \text{(c)}: \quad \binom{5}{3}, \quad \text{(d)}: \quad \binom{n+1}{n}, \quad \text{(e)}: \quad \binom{n}{n}.$$

10. Zeigen Sie folgendes:

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j} \qquad \forall n \geq j \geq 1.$$

11. Sei $p \neq 1$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

12. Seien A, B, C, D, E und F die Mengen:

$$A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}, \quad B = \{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$D = \{n^3 - n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad E = \{r \in \mathbb{R} \mid 1 < r \leq 3\}, \quad F = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^4 \notin \mathbb{Q}\}.$$

Berechnen Sie:

(a) $(\inf C)(\inf D) + (\sup E)(\inf E)$,

(b) $(\sup A + \inf A)(\sup B - \inf B)$,

(c) $\sup F$.

13. Seien A and B nichtleere Mengen reeller Zahlen und

$$A + B := \{a + b \;:\; a \in A,\ b \in B\}, \quad AB := \{ab \;:\; a \in A,\ b \in B\}.$$

Checken Sie, dass $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Gilt auch $\sup(AB) = \sup A \sup B$?

14. Geben Sie Beispiele von Mengen A, B, C, D, $E \subset \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\max A = \inf A$,

(b) $\sup B < +\infty$ aber $\max B$ existiert nicht,

(c) $\inf C = -2 \sup C$ und $\max C$ existiert nicht,

(d) D abzählbar, $\min D = 0$ und $\max D = 1$,

(e) $\sup E$ existiert nicht.

15. Seine A, B, C Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende:

(a) $(\forall a \in A :\ a \geq 0) \Rightarrow ((\sup A \geq 0) \vee (\sup A = +\infty))$,

(b) $((\min B = 0) \wedge (\max B = 1)) \not\Rightarrow B = [0, 1]$,

(c) $\sup C = +\infty \Rightarrow\ C$ entählt unendliche viele Punkte.

3 Funktionen

16. Geben Sie Beispiele von Funktionen f, g, h, ℓ, $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

(a) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{Q}) \neq \mathbb{Q}$,

(b) $g(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, $g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$,

(c) $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$,

(d) $\ell(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\ell(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \neq \mathbb{R}$.

(e) $m(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

17. Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Wie viele verschiedene Funktionen $f : A \to A$ gibt? Wie viele Funktionen $f : A \times A \to A \times A \times A$ gibt?

18. Finden Sie ein Beispiel von $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{N}$ so dass

$$\text{(a)} \quad f^{-1}(f(A)) \neq A, \quad \text{(b)} \quad f(f(A)) \subset A, \quad \text{(c)} \quad A \subset f(f(A)), \quad \text{(d)} \quad f(A) = f^{-1}(A)$$

19. Seien $f : A \to A$, $\emptyset \neq B' \subset A$ und sei $F : A \times A \to A \times A$ so definiert

$$F(a, a') := (a', f(a)) \quad \forall (a, a') \in A \times A.$$

Sei $B = f^{-1}(B')$. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \quad F(F(A \times B)), \quad \text{(b)} \quad F^{-1}(A \times B'), \quad \text{(c)} \quad F^{-1}(F(B' \times B)).$$

20. Sei $f : A \to A$, mit $A \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgendes: f injektiv $\Leftrightarrow$ f hat die Umkehrfunktion.

21. Berechnen Sie die Umkehrfunktionen von

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x - 1, \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - x, \quad h : x \in [0, 1) \mapsto x^2.$$

22. Seien f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Geben Sie Beispiele von Funktionen, sodass $(f \circ g) \circ h \neq f \circ (h \circ g)$.

23. Seien f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f \circ g \circ h$, $h \circ h \circ g$, $f \circ h \circ h$.

24. Seien f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$f \circ f,\ f \circ f \circ f,\ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\text{-Mal}},\ g \circ g,\ g \circ g \circ g,\ \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{k\text{-Mal}},\ h \circ h,\ h \circ h \circ h,\ \underbrace{h \circ \cdots \circ h}_{k\text{-Mal}}.$$

25. Sei $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 1$ und f^{-1} die Umkehrfuntion. Zeigen Sie

   (a) $f + f^{-1} = 2(f \circ f^{-1})$,

   (b) $f\, f^{-1}$ (Produkt) ist nicht injektiv,

   (c) $f \circ f \circ f$ ist injektiv.

26. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $(f \circ f)(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f = f^{-1}$ (Umkehrfunktion) und $f \circ f \circ f = f$. Stimmt es, dass $f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{R}$?

27. Für alle folgende Fuktionen, bestimmen Sie, ob sie gerade, ungerate, nach oben beschränkt, nach unten beschränkt, und beschränkt sind:

   (a) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\sin x)$,

   (b) $g : x \in [-1, 1] \mapsto x^2 - x^4$,

   (c) $h : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - e^{-x}$,

   (d) $\ell : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(e^x)$,

   (e) $m : x \in \mathbb{R} \cos(x^3)$,

28. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende:

   (a) f T-periodisch mit $T > 0 \Longrightarrow f$ nT-periodisch für alle $n \in \mathbb{N}$,

   (b) $\forall T > 0 : f$ ist T-periodisch $\Longrightarrow f$ konstant,

   (c) $\forall T \in \mathbb{Q}, T > 0 : f$ ist T-periodisch $\not\Longleftarrow f$ konstant.

29. Geben Sie Beispiele von Teilmengen A, B, C, D, $E \subset \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

   (a) A offen und nicht abgeschlossen,

   (b) B nicht offen, nicht abgeschlossen,

   (c) C nicht offen, nicht abgeschlossen, nicht beschränkt,

(d) D abzählbar, abgeschlossen, beschränkt,

(e) E offen und abgeschlossen.

30. Zeigen Sie, dass eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen ist.

31. Zeigen Sie, dass eine endliche Menge (endlich viele Punkte) abgeschlossen ist.

32. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ abgeschlossen ist und das $\mathbb{Q}$ nicht offen und nicht abgeschlossen ist.

33. Geben Sie Beispiele von Teilmengen A, B, $C \subset \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

    (a) es keine Häufungspunkte von A gibt,

    (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ Häufungspunkt von } B\}$,

    (c) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus C :$ x ein Häufungspunkt von C ist.

4 Folgen

34. Berechnen Sie die ersten vier Termen ($n = 1, 2, 3, 4$) der Folgen: $a_n = n^2 - n$, $b_n = (-1)^{(-1)^n}$, $c_n = 2 - 2/n$, $d_n = \cos(n\pi)$, $e_n = n!$, $f_n = n^n$, $g_n = n^n/(n!)$, $h_n = n^{1/n}$, $i_n = (-1)^n/n$, $m_n = 2^n - 1$.

35. Berechnen Sie die ersten fünf Termen ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) der Folgen gegeben durch

    (a) $a_0 = a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n a_{n-1}$ für alle $n \geq 2$,

    (b) $b_0 = b_1 = 3$, $b_{n+1} = b_n + 2$ für alle $n \geq 2$,

    (c) $c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n - c_{n-1}$ für alle $n \geq 2$,

    (d) $d_0 = -2$, $d_n = (-1)^n d_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

36. Berechnen Sie die ersten vier Termen ($n = 1, 2, 3, 4$) der Folgen gegeben durch

    (a) $a_0 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ für alle $n \geq 1$,

    (b) $b_0 = b_1 = 1$, $b_{n+1} = -b_{n-1}$ für alle $n \geq 2$,

    (c) $c_1 = 3$, $c_{n+1} = \sqrt{c_n}$ für alle $n \geq 1$.

    Kann man eine Formel für a_n, b_n und c_n finden?

37. Geben Sie ein Beispiel von a_n mit $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2023$.

38. Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *nach oben beschränkt*, *nach unten beschränkt beschränkt*, *konvergent*, *uneigentlich konvergent* für die gegebenen reellen Folgen vorliegen.

$$a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}, \quad b_n = (-1)^{(-1)^n}, \quad c_n = (-1)^n - (-1)^{3n+1}, \quad d_n = \sin(1/n),$$
$$e_n = n\sin(n), \quad f_n = n^3 - 64n^2, \quad g_n = \ln n - n, \quad h_n = \frac{n!}{(2n)!}.$$

39. Benutzen Sie die Definition von Limes, um folgende zu zeigen:

$$a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n} \to 0, \quad b_n = \frac{\ln n}{n^2} \to 0, \quad c_n = \frac{n^2}{\ln n} \to 0.$$

40. Benutzen Sie den Satz: "(a_n) Nullfolge, (b_n) beschránkt $\Rightarrow$ $(a_n b_n)$ Nullfolge", um folgende zu zeigen:

    (a) (a_n), (b_n) Nullfolgen, $\Rightarrow$ $(a_n b_n)$ Nullfolge;

    (b) (a_n) Nullfolge $\Rightarrow$ $(a_n \sin(a_n))$ Nullfolge;

    (c) (a_n) Nullfolge $\Rightarrow$ $(a_n + a_n^2)$ Nullfolge.

41. Für alle $\alpha \in (0, 2)$, berechne man:

    (a) $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha (n+1)^{-1}$.

    (b) $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) n^{-\alpha}$.

    (c) $\lim_{n\to+\infty} (1+2+\ldots+n)^\alpha / n$.

42. Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen, (a_n) beschränkt, $b_n \to b$, $c_n := 2^{a_n b_n}$ und $d_n = 10^{10}(a_n(b_n - b))$. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) (c_n) ist beschränkt.

    (b) (c_n) ist konvergent.

    (c) (d_n) ist konvergent.

    (d) $(d_n c_n)$ ist konvergent.

43. Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen, $a_n \to a$ und $b_n \to +\infty$. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) $a > 0 \implies a_n b_n \to +\infty$.

    (b) $a = 0 \implies a_n b_n \to 0$.

    (c) $a_n / b_n \to 0$.

    (d) $a = 0 \implies a_n \cos(b_n) \to 0$.

    (e) $a_n b_n$ beschränkt $\implies a_n b_n \to 0$.

44. Berechnen Sie:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \text{(c)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

45. Sei (a_n) eine reelle Folge. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

    (a) $a_n \to a \iff a_{n+1} - a_n \to 0$.

    (b) $0 < a_n^2 < a_n \iff a_n \to 0$.

    (c) $a_n \to a \iff a_{2n+1} \to a$.

46. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(a) (a_n) monoton, (a_n^3) beschränkt $\implies$ (a_n) konvergent.

(b) (a_n) konvergent und (a_nb_n) konvergent $\implies$ $\{b_n\}$ konvergent.

(c) $a_{2n} \to \ell_1$, $a_{2n+1} \to \ell_2$, $a_{3n} \to \ell_3$ $\implies$ $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$.

(d) $(-1)^n a_n \to \ell$, (a_n) monoton $\implies$ $\ell = 0$.

(e) (a_{2n}) monoton und (a_{2n+1}) konvergent $\implies$ (a_{3n}) konvergent.

47. Welche von diesen Folgen konvergiert? Warum?

$$a_n = \ln\left(-\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad b_n = \frac{(\log_2 n)^2}{1+\log_3 n}, \quad c_n = \frac{(\arctan n)^+}{\ln(n+1)}, \quad d_n = (\sin(\sin n))^n.$$

5 Reihen

48. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\pi^n}.$$

49. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{(b)} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(n-1)}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4n^2}.$$

50. Beweisen Sie die Konvergenz der Reihen

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2^{2n}}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n^3+1}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^{10}\ln n}{n^{5/2}}.$$

51. Sei die Menge $A \subset \mathbb{R}$ so definiert

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{x^2-8}}{n^2+1} \ \text{konvergiert} \right\}.$$

Berechnen Sie $\sup A - 2\inf A$.

6 Elementäre Funktionen

52. Seien die Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : (-\infty, 3] \to \mathbb{R}$ so definiert

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \lfloor x \rfloor x, \quad h(x) = |-x|$$

und sei $C = [0,1]$. Finden Sie die folgenden Mengen

$$f(C),\ g(C),\ h(C), f^{-1}(C),\ g^{-1}(C),\ h^{-1}(C),\ f(h(C)),\ g(h(C)),\ h^{-1}(f(C)),\ f(g(h(C))).$$

53. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie den folgenden Satz

$$f \text{ konstant} \iff f \text{ monoton wachsend und monoton fallend.}$$

54. Seien $f,\, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Sätze
    (a) f und g monoton wachsend $\Rightarrow fg$ monoton wachsend,
    (b) fg monoton $\not\Rightarrow f$ monoton und g monoton.

55. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch. Zeigen Sie das Folgendes
    (a) die Funktion $f \circ h$ ist periodisch,
    (b) die Funktionen $g \circ g$ und g^3 sind monoton,
    (c) die Funktionen $g \circ h$, $h \circ g$ und g^2 müssen nicht monoton sein.

56. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig. Zeichnen Sie den Graph der folgenden Funktionen

$$g : x \mapsto 2^{f(x)}, \quad h : x \mapsto \ln(1 + |f(x)|), \quad \ell : x \mapsto |f(|x|)|, \quad m : x \mapsto f(f(x)).$$

57. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz mit Konstante $L > 0$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ α-Hölder mit Konstante $M > 0$. Zeigen Sie, dass
    (a) $f \circ f$ Lipschitz mit Konstante L^2 ist,
    (b) $g \circ g$ (2α)-Hölder mit Konstante $M^{1+\alpha}$ ist,
    (c) $g \circ f$ α-Hölder mit Konstante $L^\alpha M$ ist.

7 Stetigkeit

58. Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = 0$ sind:

$$f_1(x) = \sqrt{x^+}, \quad f_2(x) = |x| \arctan(x), \quad f_3(x) = e^{|x|-1}$$
$$f_4 = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad f_5(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

59. Beweisen Sie den folgenden Satz: Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig. Dann $\exists x \in [0, 1]$, so dass $f(x) = x$. (Hinweis: betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$)

60. Beweisen Sie den folgenden Satz: Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ monoton wachsend. Dann $\exists x \in [0, 1]$, so dass $f(x) = x$. (Hinweis: betrachten Sie den Punkt $\sup\{x \in [0, 1] \,:\, f(x) \geq x\}$)

61. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)
    (a) $f \in C^0([0, 1]),\ f(0)f(1) \geq 0 \ \Rightarrow\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = 0.$
    (b) $f \in C^0([0, 1]),\ f(0)f(1) \leq 0 \ \Rightarrow\ \exists x \in (0, 1),\ f(x) = 0.$
    (c) $f \in C^0([0, 1]),\ f(0)f(1) \leq 0 \ \Rightarrow\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = 0.$

(d) $f \in C^0([0,\infty))$, $f(0) \cdot \lim_{x\to\infty} f(x) < 0 \;\Rightarrow\; \exists x > 0,\ f(x) = 0$.

(e) $f \in C^0(\mathbb{R})$ und periodisch $\;\Rightarrow\; f$ beschränkt.

(f) $f \in C^0(\mathbb{R})$ und periodisch $\;\Rightarrow\; f$ hat unendliche viele Maximumstellen.

62. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f = 0$ in $\mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass $f = 0$.

63. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) + \ln(\mathrm{e} + x) & x > 0 \\ \sin(x) + \alpha \sinh(x^3) - 4\alpha^2 + 2 & x \le 0. \end{cases}$$

Sei $A := \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; f \text{ stetig in } 0 \text{ ist}\}$. Finden Sie $2 \sup A - 6 \inf A$.

8 Grenzwerte von Funktionen

64. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-1}.$$

65. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{2x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{x^2-1}.$$

66. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}.$$

67. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3-1}{x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}.$$

68. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}.$$

69. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1+x}{1-x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x^2+1}{\ln x^3 - x^3}.$$

70. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^2}.$$

71. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^4}.$$

9 Differentiarechnung

72. Berechnen Sie die Ableitung in $\mathbb{R}$ der foldenden Funktionen

$$\text{(a) } x \mapsto x^2 \sin(x^3), \quad \text{(b) } x \mapsto \ln(1+x^2), \quad \text{(c) } x \mapsto e^{\cos(x^2)}, \quad \text{(d) } x \mapsto \arctan(\arctan(x)).$$

73. Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen differentierbar sind, und berechnen die Ableitung

$$\text{(a) } x \in \mathbb{R} \mapsto x^{1/3}, \quad \text{(b) } x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+|x|), \quad \text{(c) } x \in \mathbb{R} \mapsto x^+ \sin x, \quad \text{(d) } x \mapsto \arctan(|x|).$$

74. Zeigen Sie, dass die funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. Ist f' stetig?

75. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen Sie die Ableitung von

$$\text{(a) } x \mapsto f(x^2), \quad \text{(b) } x \mapsto f(x) - f(-x), \quad \text{(c) } x \mapsto \sin(f(x)), \quad \text{(d) } x \mapsto e^{f(f(x))}.$$

76. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so gegeben: $f(x) = x^2 \arctan(1+x) + \sin(x^3) + (x-1)^3$ und sei $y = g(x)$ die Gleichung, die die Tangente zum Graphen von f im Punkt $(0, -1)$ definiert. Berechnen Sie $g(2)$ und $g'(0)$.

77. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch. Zeigen Sie, dass f unendliche viele Maximumstellen hat.

78. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und periodisch. Zeigen Sie, dass f unendliche viele kritische Punkte hat.

79. Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und periodisch. Zeigen Sie, dass es unendliche viele Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $f''(x) = 0$ gibt.

80. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, periodisch und nicht konstant. Zeigen Sie, dass es unendliche viele Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) > 0$ gibt.

81. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) > 0$ gibt. Stimmt folgendes: $(\forall \alpha > 0 \; \exists x_\alpha \in \mathbb{R} : \; f'(x_\alpha) > \alpha)$?

82. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Zeigen Sie, dass f einen kritischen Punkt hat.

83. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f'(x) = 0$.

84. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gerade. Zeigen Sie, dass $f'(0) = 0$.

10 Integralrechnung

85. Berechnen Sie folgende

$$\text{(a):}\quad \int x^7\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b):}\quad \int \frac{1+x^2}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c):}\quad \int x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x.$$

86. Berechnen Sie folgende

$$\text{(a):}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x}, \qquad \text{(b):}\quad \int \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c):}\quad \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

87. Sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ die Stammfunktion von $x \mapsto 1/(1+x^2)$ mit $F(0) = 2$. Berechnen Sie $F(1)$.

88. Sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ die Stammfunktion von $x \mapsto x^2 - 1$ mit $F(0) = F'(0)$. Berechnen Sie $F(3)$.

89. Sei $F \in C^1(0, +\infty)$ die Stammfunktion von $x \mapsto 1/x$ mit $F(1) = F''(1)$. Berechnen Sie $F(\mathrm{e})$.

90. Berechnen Sie folgende

$$\text{(a):}\quad \int x\,\ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b):}\quad \int x^2\ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c):}\quad \int x^m\ln x\,\mathrm{d}x \quad (m \in \mathbb{N}).$$

91. Berechnen Sie folgende

$$\text{(a):}\quad \int x\,\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b):}\quad \int x^2\,\cos x\,\mathrm{d}x.$$

92. Seien $f,\, F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F' = f$ und $F(0) = 0$. Zeigen Sie folgende:
    (a) f konstant $\;\Leftrightarrow\;$ F linear;
    (b) f Polynom $\;\Leftrightarrow\;$ F Polynom;
    (c) $f \geq 0 \;\Rightarrow\; xF(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.