Einführung in die Analysis — Prüfung 20.02.2020 - **Teil 1**

Name, Vorname | Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei $a_n = (2/(2+i))^{2n} \in \mathbb{C}$. Dann: **a** (a_n) konvergiert nicht. **b** $a_n \to +\infty$. **c** $a_n \to 0$. **d** $a_n \to 2$.
2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und konvex. Dann: **a** $x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$ ist konvex. **b** $x \mapsto f^2(x)$ ist konvex. **c** f ist monoton. **d** $f \circ f$ ist konvex.
3. Sei A das kleinste konvexe Polygon, das die Menge $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = i\}$ enthält. Wie groß ist die Fläche von A? **a** $\sqrt{2}$. **b** 1. **c** 1/2. **d** 2.
4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so gegeben: $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1$ für $x < 0$ und $f(x) = 2\sin(\alpha x)$ für $x \geq 0$. Für welchen Wert $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar? **a** -1. **b** 2. **c** 1. **d** -2.
5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und zweimal differenzierbar in 0 mit $f'(0) > 0$. Dann: **a** $\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq 0$. **b** f ist monoton. **c** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. **d** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
6. Sei $A = \{xy : x \in (0, 1/2),\ y \in \mathbb{Z},\ |y| < 3\}$. Welchen Wert hat $\inf A + \sup A$? **a** 1. **b** -1. **c** 1/2. **d** 0.
7. Sei $x \in (-1/9, 1/9)$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 9^n x^n$. Welchen Wert hat $f'(0)$? **a** 9. **b** -9. **c** 0. **d** 1.
8. Sei $a_n \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Dann: **a** $\forall p \geq 0 : \ a_n \leq 1/n^p$ fast immer. **b** $\forall \lambda \in [0, 1) : \ a_n \leq \lambda^n$ fast immer. **c** $\exists \lambda \in [0, 1) : \ a_n \leq \lambda^n$ fast immer. **d** $\exists p \geq 0 : \ a_n \leq 1/n^p$ fast immer.
9. Sei g die Umkehrfunktion von $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 3x - 3$. Welchen Wert hat $2g'(1)$? **a** 0. **b** 3. **c** 1. **d** 1/3.
10. Sei $a_n \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Dann: **a** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = +\infty$. **b** $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n) < +\infty$. **c** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1/2} < +\infty$. **d** $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{a_n} < +\infty$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Zur Verfügung gestellt von:
Ulisse Stefanelli
PR Einführung in die Analysis, WiSe 2019/20
LV-Nr.: 250011
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ]

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Sei $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2) + 3x\mathrm{e}^x + 3$ und $y = g(x)$ die Gleichung, die die Tangent zum Graphen von f im Punkt $(0, 3)$ definiert. Ferner sei $\alpha = \sup\{x \in \mathbb{R} : g(3x) < g(x-1)\}$. Welchen Wert hat $2\alpha + g(1)$?

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    [0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Berechnen Sie den Limes
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\mathrm{e}^{-x^2/2} - \cos x)}{(\arctan(\mathrm{Sh}(x^2)))^2/4!}.$$

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    [0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie folgenden Satz:
$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Polynom gerader Ordnung } \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} p(x).$$

    (Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)