Vektorrechnung

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

Vorkurs 2019

PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

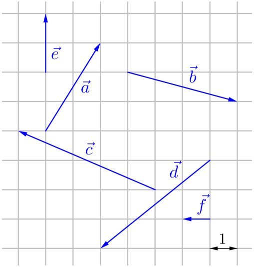
Folien online verfügbar: mmf.univie.ac.at/vorkurs

- Was sind **2-dimensionale Vektoren**?
- Wie veranschaulichen wir sie in einem Raster?

$\vec{a} = \binom{2}{3}$ $\vec{d} = \binom{-4}{-3}$

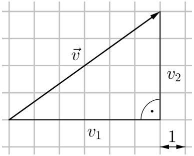
$\vec{b} = \binom{4}{-1}$ $\vec{e} = \binom{0}{2}$

$\vec{c} = \binom{-5}{2}$ $\vec{f} = \binom{-1}{0}$



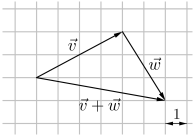
- **Länge (Betrag)** von $\vec{v}$

$$|\vec{v}| = ?$$



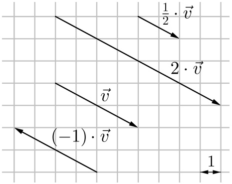
- **Addition** von Vektoren

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{pmatrix}$$



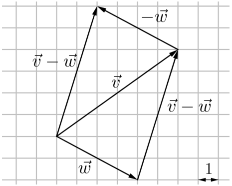
- **Multiplikation** mit einem **Skalar**

$$r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}$$



- **Subtraktion** von Vektoren

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \end{pmatrix}$$

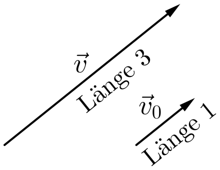


Der Vektor $r \cdot \vec{v}$ hat die Länge $|r| \cdot |\vec{v}|$.

Wenn $\vec{v}$ die Länge 3 hat,

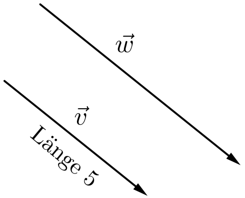
dann hat $\vec{v_0} = \frac{1}{3} \cdot \vec{v}$ die Länge 1.

$\boldsymbol{\vec{v_0}}$ ist der **Einheitsvektor** von $\vec{v}$.



Wenn $\vec{v}$ die Länge 5 hat,

welche Länge hat dann $\vec{w} = \frac{9}{5} \cdot \vec{v}$?



Skalarprodukt und Winkel

- **Skalarprodukt** zweier Vektoren

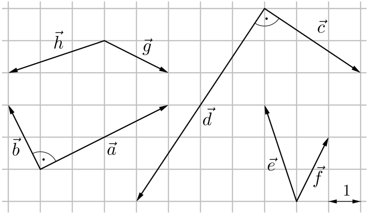
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = ?$$

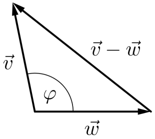
$$\vec{e} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$\vec{g} \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = ?$$



- **Winkel** zwischen Vektoren

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$



Normalvektoren

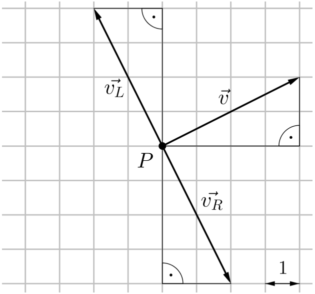
Wir drehen den Vektor $\overrightarrow{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ...

...um 90° im Uhrzeigersinn:

$$\overrightarrow{v_R} = \binom{v_2}{-v_1}$$

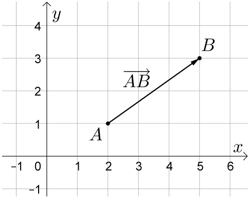
...um 90° gegen den Uhrzeigersinn:

$$\overrightarrow{v_L} = \binom{-v_2}{v_1}$$



$\overrightarrow{v_L}$ und $\overrightarrow{v_R}$ sind **Normalvektoren** von $\overrightarrow{v}$.

$$\left.\begin{aligned} A &= (a_1 \mid a_2) \\ B &= (b_1 \mid b_2) \end{aligned}\right\} \text{Vektor } \overrightarrow{AB} \text{ vom Punkt } A \text{ zum Punkt } B$$

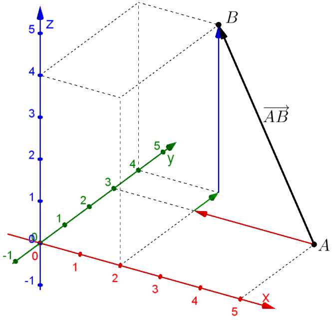


Spitze-minus-Schaft – Regel

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

AB – Vektorrechnung in der Ebene

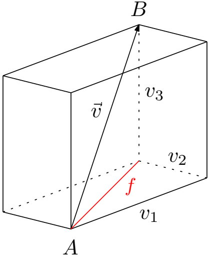
$$\left.\begin{aligned} A &= (a_1 \mid a_2 \mid a_3) \\ B &= (b_1 \mid b_2 \mid b_3) \end{aligned}\right\}$$ Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Punkt A zum Punkt B



Spitze-minus-Schaft – Regel

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 4-3 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit 3-dimensionalen Vektoren



- **Länge (Betrag)** von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$|\vec{v}| = ?$$

- **Addition** von Vektoren

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$$

- **Multiplikation** mit einem **Skalar**

$$r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

- **Subtraktion** von Vektoren

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ v_3-w_3 \end{pmatrix}$$

- **Skalarprodukt** zweier Vektoren

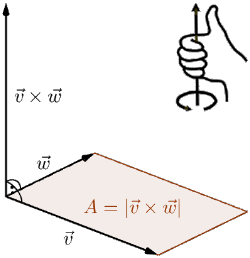
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

- **Winkel** zwischen Vektoren

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

- **Vektorprodukt** zweier Vektoren

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$



AB – Vektorrechnung im Raum

Überblick zu den Kompetenzmaterialien

$$\text{Paket 1} \begin{cases} \text{KH – Vektorrechnung in der Ebene} \\ \text{AB – Vektorrechnung in der Ebene} \end{cases}$$

$$\text{Paket 2} \begin{cases} \text{KH – Vektorrechnung im Raum} \\ \text{AB – Vektorrechnung im Raum} \end{cases}$$

Kompetenzmaterialien online verfügbar: mmf.univie.ac.at/materialien