

Differentialrechnung



Vorkurs 2019



Folien online verfügbar: mmf.univie.ac.at/vorkurs



Wie misst man die **Steigung von Geraden**?

Differenzenquotient & Steigungswinkel



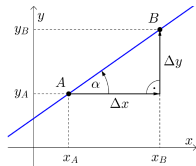
Eine Gerade verläuft durch die Punkte $A = (x_A | y_A)$ und $B = (x_B | y_B)$.

Die **Steigung** der Geraden ist der folgende **Differenzenquotient**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Zwischen Steigung und **Steigungswinkel** gilt folgender Zusammenhang:

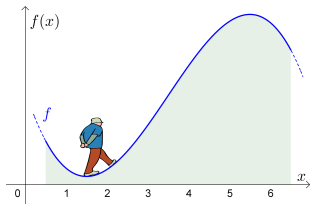
$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Steigungsmessung an Funktionsgraphen

Ein Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?



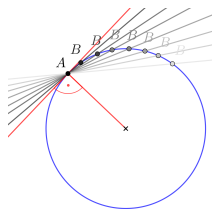
Allgemein:

Wie misst man die **Steigung des Funktionsgraphen** in einem Punkt?

Von Sekanten zur Tangente

Kreis:

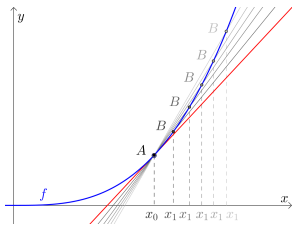
- Was sind Sekanten durch den Punkt A ?
- Was ist die Tangente im Punkt A ?



Funktionsgraph:

- Was sind Sekanten durch den Punkt A ?
- Was ist die Tangente im Punkt A ?
- Steigung der Tangente:

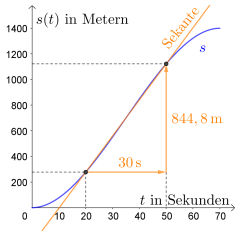
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Änderungsraten

$s(t)$... zurückgelegter Weg in Metern nach t Sekunden

Mittlere Änderungsrate
von s im Zeitraum $[20\text{ s}, 50\text{ s}]$

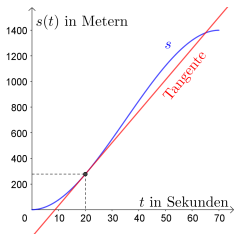


Steigung der Sekante

$$\frac{s(50) - s(20)}{50 - 20} = 28,16 \text{ m/s}$$

Mittlere Geschwindigkeit in $[20\text{ s}, 50\text{ s}]$

Lokale Änderungsrate
von s zum Zeitpunkt $t = 20\text{ s}$



Steigung der Tangente

$$s'(20) = 24,48... \text{ m/s}$$

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 20\text{ s}$

Qualitative Untersuchung von Funktionen

Gegeben:

Graph von f

Gesucht:

Graphen von f' und f''

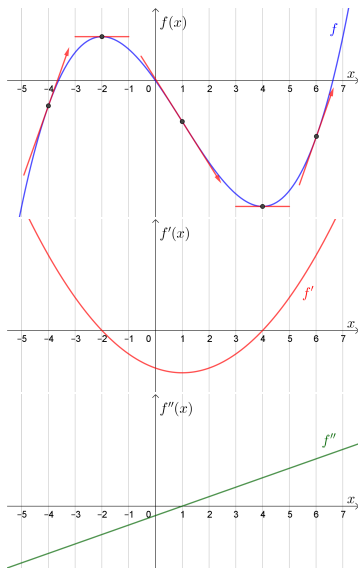
f' wechselt das Vorzeichen.

Was bedeutet das für f ?

f'' wechselt das Vorzeichen.

Was bedeutet das für f' ?

Was bedeutet das für f ?



AB – Ableitungen höherer Ordnung

Welche **Regeln** helfen beim Ermitteln von Ableitungen?

Funktion f	Ableitungsfunktion f'
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$a(x) = 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3$$

$$b(x) = 2 \cdot x \cdot e^x$$

$$c(x) = \ln(x^2 + 42)$$

$$d(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} + 6$$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
-------------	-----------------------------

Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
-------------	--------------------------

Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
--------------	--

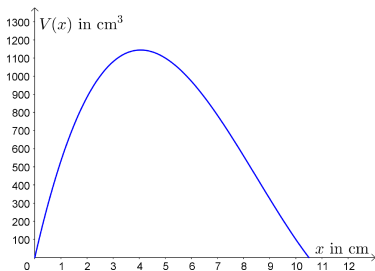
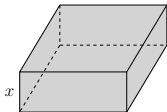
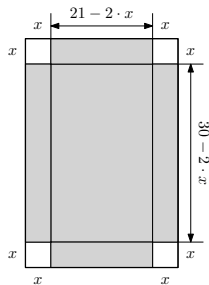
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$
-----------------	---

Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
-------------	---

SRDP-Formelsammlung

KH – Differenzieren I

Rechteckiger Karton mit Seitenlängen $a = 21$ cm und $b = 30$ cm



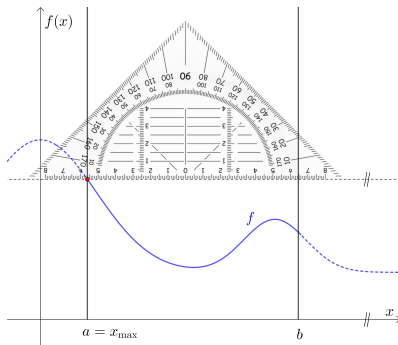
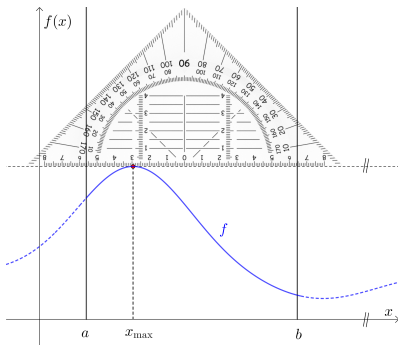
Das Volumen V der gefalteten Schachtel hängt von x ab.

Für welche Zahl x ist das Volumen so groß wie möglich?

First derivative test

f ist eine differenzierbare Funktion.

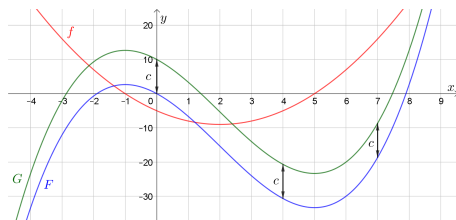
Gesucht ist eine Stelle x_{\max} in $[a, b]$, an der die Funktion f den *größten* Funktionswert annimmt.



Welche Stellen in $[a, b]$ kommen dafür in Frage?

Stammfunktionen

Welche Beziehung besteht zwischen einer Funktion f und jeder ihrer **Stammfunktionen**?



Warum sind sowohl F als auch G Stammfunktionen von f ?

Welche Regeln helfen beim Ermitteln von Stammfunktionen?

Funktion f Stammfunktion F

$$f(x) = k \quad F(x) = k \cdot x$$

$$f(x) = x^q \quad F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1} \quad \text{für } q \neq -1$$
$$F(x) = \ln(|x|) \quad \text{für } q = -1$$

$$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \quad F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$$

$$f(x) = \ln(x) \quad F(x) = x \cdot \ln(x) - x$$

$$f(x) = \log_a(x) \quad F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$$

$$f(x) = \sin(x) \quad F(x) = -\cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad F(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \tan(x) \quad F(x) = -\ln(|\cos(x)|)$$

[SRDP-Formelsammlung](#)

[AB – Stammfunktionen](#)

Überblick zu den Kompetenzmaterialien

Paket 1 { KH – Differenzieren I
AB – Differentialquotient
AB – Steigungsmessung von Geraden

Paket 2 { KH – Differenzieren II
AB – Ableitungen höherer Ordnung
AB – Optimierungsaufgaben

Paket 3 { KH – Stammfunktionen
AB – Stammfunktionen

Paket 4 { AB – Newtonsches Näherungsverfahren
TB – Kurvenuntersuchungen
TB – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

Kompetenzmaterialien online verfügbar: mmf.univie.ac.at/materialien

